

Der Ingenieurbau

■ **Werkstoffe**

■ **Elastizitätstheorie**



Ernst & Sohn

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Verzeichnis der Verfasser

Werkstoffe des Bauwesens

| | | |
|---------|-----------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Einleitung und Übersicht der Werkstoffe des Bauwesens | 1 |
| 2 | Eigenschaften der Baustoffe im allgemeinen | 2 |
| 2.1 | Mechanische Eigenschaften | 2 |
| 2.2 | Physikalisch-chemische Erscheinungen | 7 |
| 3 | Anorganisch mineralische Bindemittel | 11 |
| 3.1 | Gips | 11 |
| 3.2 | Kalk | 11 |
| 3.3 | Zement | 12 |
| 3.3.1 | Portlandzement | 12 |
| 3.3.2 | Portland-Kompositzemente | 13 |
| 3.3.3 | Weitere Zemente | 14 |
| 3.3.4 | Hydratation der Zemente | 15 |
| 3.3.5 | Wassermischungsverhältnis und Porenraum | 16 |
| 4 | Beton | 20 |
| 4.1 | Betonzuschlag | 20 |
| 4.1.1 | Arten und Anforderungen | 20 |
| 4.1.2 | Kornzusammensetzung | 22 |
| 4.2 | Zugabewasser | 23 |
| 4.3 | Frischbeton | 23 |
| 4.3.1 | Eigenschaften | 23 |
| 4.3.2 | Konsistenzmessungen | 25 |
| 4.4 | Grüner Beton | 25 |
| 4.4.1 | Grünfestigkeit | 26 |
| 4.4.2 | Setzen und Kapillarschwinden | 27 |
| 4.5 | Junger Beton | 27 |
| 4.6 | Festbeton | 31 |
| 4.6.1 | Druckfestigkeit | 32 |
| 4.6.1.1 | Innere Einflüsse | 32 |
| 4.6.1.2 | Äußere Einflüsse | 33 |
| 4.6.1.3 | Art und Dauer der Belastung | 34 |
| 4.6.2 | Zugfestigkeit | 37 |
| 4.6.3 | Verformungsverhalten | 37 |
| 4.6.3.1 | Druckbeanspruchung | 37 |
| 4.6.3.2 | Zugbeanspruchung | 38 |
| 4.6.4 | Zeitabhängiges Verformungsverhalten | 40 |
| 4.6.4.1 | Schwinden und Quellen | 41 |
| 4.6.4.2 | Kriechen und Relaxation | 43 |

| | | |
|---------|----------------------------------------------------------|-----|
| 4.6.5 | Physikalische Eigenschaften | 45 |
| 4.6.5.1 | Wasserdurchlässigkeit | 45 |
| 4.6.5.2 | Luftdurchlässigkeit | 46 |
| 4.6.5.3 | Diffusion | 47 |
| 4.6.5.4 | Thermische Eigenschaften | 48 |
| 4.6.6 | Langzeitverhalten | 49 |
| 4.6.6.1 | Widerstand gegen physikalische Beanspruchungen | 50 |
| 4.6.6.2 | Widerstand gegen chemische Beanspruchung | 52 |
| 4.6.6.3 | Korrosion der Bewehrung | 54 |
| 5 | Leichtbeton | 55 |
| 5.1 | Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge | 55 |
| 5.2 | Leichtbeton mit haufwerksporigem Gefüge | 59 |
| 5.3 | Porenbeton (Schaumbeton) | 59 |
| 5.4 | Porenbeton | 60 |
| 6 | Faserbeton | 60 |
| 6.1 | Allgemeine Gesichtspunkte | 60 |
| 6.2 | Stahlfaserbeton | 63 |
| 6.3 | Beton mit mineralischen Fasern | 64 |
| 6.4 | Beton mit organischen Fasern | 65 |
| 6.5 | Ferrozement | 66 |
| 7 | Naturstein | 67 |
| 8 | Keramische Baustoffe und Glas | 70 |
| 8.1 | Ausgangsstoffe | 70 |
| 8.2 | Ziegel- und Tonwaren | 70 |
| 8.3 | Glas | 71 |
| 9 | Metalle | 72 |
| 9.1 | Aufbau und Struktur | 72 |
| 9.2 | Phasendiagramme | 74 |
| 9.3 | Thermische und mechanische Behandlungen | 76 |
| 9.4 | Korrosion | 80 |
| 9.5 | Stahl | 82 |
| 9.5.1 | Einteilung und Prüfungen | 82 |
| 9.5.2 | Baustähle | 84 |
| 9.5.3 | Betonstähle | 90 |
| 9.5.4 | Spannstähle | 93 |
| 9.5.5 | Nichtrostende Stähle | 96 |
| 9.6 | Eisen-Gußwerkstoffe | 97 |
| 9.7 | Aluminiumlegierungen | 97 |
| 9.7.1 | Zusammensetzung | 97 |
| 9.7.2 | Mechanische Eigenschaften | 99 |
| 9.7.3 | Korrosion | 103 |
| 10 | Holz und Holzwerkstoffe | 104 |
| 10.1 | Holz | 104 |
| 10.1.1 | Aufbau | 104 |
| 10.1.2 | Physikalische Eigenschaften | 105 |
| 10.1.3 | Mechanische Eigenschaften | 107 |
| 10.1.4 | Chemische und biologische Einwirkungen | 108 |
| 10.2 | Holzwerkstoffe | 109 |
| 10.2.1 | Aufbau | 109 |
| 10.2.2 | Physikalische Eigenschaften | 110 |

| | | |
|--------|-------------------------------------------------------|-----|
| 10.2.3 | Mechanische Eigenschaften | 110 |
| 11 | Kunststoffe | 111 |
| 11.1 | Einleitung | 111 |
| 11.2 | Herstellung und Struktur von Kunststoffen | 112 |
| 11.2.1 | Polymerisation | 112 |
| 11.2.2 | Polykondensation, Polyaddition | 114 |
| 11.2.3 | Bindung und Struktur des Polymermoleküls | 114 |
| 11.3 | Thermomechanisches Verhalten | 115 |
| 11.4 | Zeiteinflüsse auf das mechanische Verhalten | 119 |
| 11.5 | Anwendungsbeispiele | 123 |
| 12 | Literatur | 131 |

Werkstoffmechanik

| | | |
|-------|---------------------------------------------------|-----|
| 1 | Einführung | 133 |
| 2 | Grundbegriffe | 133 |
| 2.1 | Spannung | 133 |
| 2.2 | Verzerrung | 137 |
| 2.3 | Klassifizierung des Werkstoffverhaltens | 139 |
| 3 | Elastizität | 140 |
| 3.1 | Linear elastisches Material | 140 |
| 3.1.1 | Verallgemeinertes Hookesches Gesetz | 140 |
| 3.1.2 | Isotropie | 141 |
| 3.1.3 | Orthotropie, Transversale Isotropie | 143 |
| 3.2 | Nichtlinear elastisches Material | 144 |
| 4 | Viskoelastizität | 145 |
| 4.1 | Allgemeines | 145 |
| 4.2 | Viskose Newtonsche Flüssigkeit | 146 |
| 4.3 | Materialmodelle | 147 |
| 4.4 | Stoffgesetz der Viskoelastizität | 149 |
| 4.5 | Elastisch-viskoelastische Analogie | 150 |
| 4.6 | Elastische Näherung | 151 |
| 5 | Plastizität | 151 |
| 5.1 | Allgemeines | 151 |
| 5.2 | Einfache Materialmodelle | 152 |
| 5.3 | Stoffgesetz der Plastizität | 153 |
| 5.3.1 | Fließbedingung | 153 |
| 5.3.2 | Fließregel | 155 |
| 6 | Werkstoffversagen, Bruch | 156 |
| 6.1 | Grundbegriffe | 156 |
| 6.2 | Festigkeitshypothesen | 158 |
| 6.2.1 | Hauptspannungshypothese | 158 |
| 6.2.2 | Hauptdehnungshypothese | 159 |
| 6.2.3 | Formänderungsenergiehypothese | 159 |
| 6.2.4 | Coulomb-Mohr-Hypothese | 159 |
| 6.3 | Elemente der Bruchmechanik | 160 |
| 6.3.1 | Allgemeines | 160 |
| 6.3.2 | K-Konzept | 161 |

Elastizitätstheorie

| | | |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 | Einleitung | 165 |
| 1.1 | Übersicht | 165 |
| 1.2 | Bemerkungen zur historischen Entwicklung der Kontinuumsmechanik fester Körper | 167 |
| 1.3 | Grundlagen der Kontinuumsmechanik fester Körper | 168 |
| 1.3.1 | Der materielle Körper und seine Eigenschaften | 168 |
| 1.3.2 | Die Beschreibung der Lage und Bewegung des materiellen Körpers | 169 |
| 1.3.3 | Die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik | 170 |
| 1.3.4 | Die konstitutiven Gleichungen | 170 |
| 1.3.5 | Das Aufgabengebiet der Elastizitätstheorie | 171 |
| 1.3.6 | Die mathematische Behandlung der Elastizitätstheorie | 171 |
| 1.3.7 | Einführung in die Finite-Elemente-Methode | 172 |
| 2 | Lage und Bewegung des materiellen Körpers | 172 |
| 2.1 | Grundlagen | 172 |
| 2.1.1 | Die deterministische Theorie | 172 |
| 2.1.2 | Die mathematische Beschreibung der physikalischen Ereignisse | 172 |
| 2.1.2.1 | Die Beschreibung des Anschauungsraumes \mathcal{E}_t | 173 |
| 2.1.2.2 | Die Beschreibung des Raumes \mathcal{T} der betrachteten Zeitpunkte | 174 |
| 2.1.2.3 | Die Einführung des Beobachters Σ | 174 |
| 2.1.2.4 | Vereinbarungen und Bezeichnungen | 174 |
| 2.2 | Beschreibung der Lage des materiellen Körpers \mathcal{B} in Abhängigkeit der materiellen Punkte \mathcal{M} | 175 |
| 2.3 | Veranschaulichung der mathematischen Forderungen | 176 |
| 2.3.1 | Injektivität, Surjektivität und Bijektivität der Abbildung $\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ | 176 |
| 2.3.2 | Stetigkeit der Abbildung $\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ | 178 |
| 2.3.3 | Stetigkeit der Abbildung $\chi_{\mathcal{M}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ | 179 |
| 2.4 | Einführung der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 | 179 |
| 2.5 | Betrachtungsweisen der Bewegung des materiellen Körpers \mathcal{B} | 181 |
| 2.5.1 | Darstellung der Bewegung in Abhängigkeit der materiellen Punkte \mathcal{M} | 182 |
| 2.5.2 | Die materielle oder Lagrangesche Betrachtungsweise | 182 |
| 2.5.3 | Die räumliche oder Eulersche Betrachtungsweise | 183 |
| 2.5.4 | Die relative Beschreibung der Bewegung | 183 |
| 2.6 | Bemerkungen zum Wechsel des Beobachters | 184 |
| 2.7 | Bemerkungen zum Wechsel der Referenzkonfiguration | 186 |
| 2.8 | Bemerkungen zum Wechsel des Koordinatensystems | 187 |
| 3 | Deformationen und Verzerrungen | 188 |
| 3.1 | Grundlagen und Vereinbarungen | 189 |
| 3.2 | Der materielle Deformationsgradient F | 191 |
| 3.3 | Multiplikative oder polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten F | 193 |
| 3.4 | Der Greensche Verzerrungstensor E | 195 |
| 3.4.1 | Anschauliche Einführung des Greenschen Verzerrungstensors E | 195 |
| 3.4.2 | Herleitung des Greenschen Verzerrungstensors E mit Hilfe der Differenz der Quadrate der Linienelemente im verformten und unverformten Zustand | 197 |
| 3.4.3 | Darstellung des Greenschen Verzerrungstensors E in konvektiven Koordinaten durch die Differenz der Metrikensoren in der Momentan- und der Referenzkonfiguration | 198 |

| | | |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.4.4 | Darstellung des Greenschen Verzerrungstensors E mit Hilfe des materiellen Verschiebungsgradienten H | 200 |
| 3.4.5 | Vergleich des Greenschen Verzerrungstensors E mit den Ingenieurverzerrungen γ | 201 |
| 3.5 | Der Almansische Verzerrungstensor $E^{(A)}$ | 203 |
| 3.6 | Hauptachsentransformation der Verzerrungstensenoren | 204 |
| 3.6.1 | Hauptachsentransformation des Rechts-Streck-Tensors U | 205 |
| 3.6.2 | Hauptachsentransformation des Links-Streck-Tensors V | 206 |
| 3.6.3 | Spektraldarstellung der Verzerrungstensenoren | 206 |
| 3.6.4 | Einführung weiterer Verzerrungstensenoren | 207 |
| 3.6.5 | Das Cauchysche Dehnungsellipsoid | 207 |
| 3.7 | Multiplikative Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten in volumetrische und isochore Anteile | 209 |
| 3.8 | Additive Aufspaltung des Greenschen Verzerrungstensors E in Kugeltensor E^K und Deviator E^D | 210 |
| 3.9 | Verträglichkeitsbedingungen für die linearen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen | 211 |
| 3.10 | Transformation geometrischer Größen von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration | 213 |
| 3.10.1 | Pull-Back und Push-Forward-Operationen | 213 |
| 3.10.2 | Transformation der Linienelemente | 214 |
| 3.10.3 | Transformation der Volumenelemente | 215 |
| 3.10.4 | Transformation der Flächenelemente | 216 |
| 4 | Zeitliche Ableitungen | 216 |
| 4.1 | Materielle Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen | 216 |
| 4.1.1 | Materielle Darstellung der materiellen Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen | 217 |
| 4.1.2 | Räumliche Darstellung der materiellen Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen | 217 |
| 4.2 | Materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen | 218 |
| 4.2.1 | Materielle Darstellung der materiellen Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen | 218 |
| 4.2.2 | Räumliche Darstellung der materiellen Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen | 218 |
| 4.2.3 | Beispiel für die materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen | 219 |
| 4.3 | Materielle Zeitableitung geometrischer Größen | 219 |
| 4.3.1 | Die materielle Zeitableitung des Linienelementes dx | 220 |
| 4.3.2 | Die materielle Zeitableitung der Jacobi-Determinante $\det F$ | 220 |
| 4.3.3 | Die zeitliche Ableitung des Volumenelementes dv | 222 |
| 4.3.4 | Die zeitliche Ableitung des Oberflächenelementes da | 222 |
| 4.4 | Transformationsbeziehungen beim Wechsel des Beobachters – Beobachterinvarianz physikalischer Größen | 222 |
| 4.5 | Untersuchung der Beobachterinvarianz zeitlicher Ableitungen | 225 |
| 4.5.1 | Untersuchung der Objektivität der Geschwindigkeit $v(x, t)$ | 225 |
| 4.5.2 | Untersuchung der Objektivität der Beschleunigung $a(x, t)$ | 226 |
| 5 | Die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik | 227 |
| 5.1 | Satz von der Erhaltung der Masse | 227 |
| 5.2 | Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße | 229 |
| 5.2.1 | Räumliche Darstellung | 229 |
| 5.2.2 | Materielle Darstellung | 231 |

| | | |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.3 | Einführung mechanischer Spannungen | 231 |
| 5.3.1 | Einführung des Spannungsvektors t und des Cauchyschen Spannungstensors T in der Momentankonfiguration B_t | 232 |
| 5.3.1.1 | Einführung des Spannungsvektors t | 232 |
| 5.3.1.2 | Das Cauchy-Postulat | 232 |
| 5.3.1.3 | Das Cauchy-Fundamentallemma | 233 |
| 5.3.1.4 | Das Cauchy-Theorem | 234 |
| 5.3.2 | Darstellung der dynamischen Feldgleichungen in der Momentankonfiguration | 237 |
| 5.3.2.1 | Herleitung der dynamischen Feldgleichungen | 237 |
| 5.3.2.2 | Indeschreibweise der dynamischen Feldgleichungen | 238 |
| 5.3.3 | Materielle Darstellung des Spannungsvektors t und des Cauchyschen Spannungstensors T in der Referenzkonfiguration B_0 | 239 |
| 5.3.3.1 | Transformation der eingprägten Volumenkräftdichte \bar{b} | 239 |
| 5.3.3.2 | Transformation der eingprägten Oberflächekräftdichte $\bar{t}(x, t, n)$ | 240 |
| 5.3.3.3 | Transformation des Spannungsvektors $t(x, t, n)$ und Einführung der Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren | 240 |
| 5.3.4 | Darstellung der dynamischen Feldgleichungen in der Referenzkonfiguration | 242 |
| 5.4 | Der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses | 242 |
| 5.4.1 | Räumliche Darstellung | 243 |
| 5.4.2 | Materielle Betrachtungsweise | 245 |
| 5.4.2.1 | Betrachtung des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors P | 246 |
| 5.4.2.2 | Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors S | 246 |
| 5.5 | Der Bilanzsatz der kinetischen Energie | 246 |
| 5.5.1 | Herleitung des Bilanzsatzes der kinetischen Energie | 246 |
| 5.5.2 | Einführung der Elementarleistung und arbeitskonformer Paarungen von Spannungs- und Verzerrungstensoren | 248 |
| 5.6 | Der Energieerhaltungssatz | 251 |
| 5.6.1 | Der Erhaltungssatz der gesamten mechanischen und thermischen Energie | 251 |
| 5.6.2 | Die lokale Formulierung des Energieerhaltungssatzes | 252 |
| 5.7 | Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik | 253 |
| 5.8 | Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik | 254 |
| 6 | Zusammenstellung und Linearisierung der stoffunabhängigen Gleichungen | 257 |
| 6.1 | Zusammenstellung der stoffunabhängigen Gleichungen | 258 |
| 6.2 | Mathematische Grundlagen der Linearisierung | 259 |
| 6.2.1 | Linearisierung reellwertiger Funktionen einer Veränderlichen | 259 |
| 6.2.2 | Linearisierung skalarwertiger Funktionen mehrerer Veränderlichen | 260 |
| 6.2.3 | Linearisierung vektor- und tensorwertiger Funktionen | 261 |
| 6.3 | Linearisierung der stoffunabhängigen Gleichungen | 261 |
| 6.3.1 | Linearisierung der kinematischen Beziehungen | 262 |
| 6.3.1.1 | Linearisierung des materiellen Deformationsgradienten | 262 |
| 6.3.1.2 | Linearisierung des räumlichen Deformationsgradienten | 262 |
| 6.3.1.3 | Linearisierung des Greenschen Verzerrungstensors | 263 |
| 6.3.1.4 | Linearisierung des Almansischen Verzerrungstensors | 263 |
| 6.3.1.5 | Linearisierung der Determinante des materiellen Deformationsgradienten | 264 |
| 6.3.1.6 | Linearisierung der polaren Zerlegung | 265 |
| 6.3.2 | Linearisierung der Spannungstensoren | 267 |
| 6.3.3 | Linearisierung der Feldgleichungen | 268 |

| | | |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7 | Die konstitutiven Gleichungen elastischer Materialien | 269 |
| 7.1 | Allgemeines | 269 |
| 7.2 | Allgemeingültige Prinzipien zur Aufstellung von Materialgleichungen . . . | 270 |
| 7.3 | Die Definition des elastischen Materials | 274 |
| 7.3.1 | Der Übergang von der allgemeinen Materialtheorie zum elastischen Material | 274 |
| 7.3.2 | Das Hookesche Werkstoffgesetz | 276 |
| 7.4 | Folgerungen aus dem Potentialcharakter der Formänderungsenergie . . . | 277 |
| 7.4.1 | Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse | 277 |
| 7.4.2 | Darstellung der Spannungstensoren aus der Formänderungsenergiefunktion | 279 |
| 7.4.3 | Herleitung der Materialtensoren | 280 |
| 7.4.4 | Folgerungen für den Materialtensor aus dem Potentialcharakter der Formänderungsenergie | 281 |
| 7.5 | Das Prinzip der materiellen Objektivität und die Auswirkungen auf die Darstellungsformen der konstitutiven Gleichungen elastischer Materialien | 281 |
| 7.6 | Die Materialgleichungen isotroper elastischer Materialien | 284 |
| 7.6.1 | Der Einfluß der Referenzkonfiguration auf den Deformationsgradienten . | 284 |
| 7.6.2 | Das Prinzip der materiellen Symmetrie | 285 |
| 7.6.3 | Das Materialgesetz homogener, isotroper, elastischer Materialien | 287 |
| 7.6.4 | Die Formänderungsenergiefunktion eines homogenen, isotropen, hyperelastischen Materials | 288 |
| 7.7 | Das Verhalten der konstitutiven Gleichungen in der Umgebung der Referenzkonfiguration | 289 |
| 7.8 | Das St. Venant-Kirchhoff-Material als Beispiel einer linearen elastischen Materialgleichung | 291 |
| 7.9 | Das Hookesche Werkstoffgesetz | 293 |
| 7.9.1 | Herleitung des Hookeschen Werkstoffgesetzes | 293 |
| 7.9.2 | Bestimmung der Lamé-Parameter λ und μ | 295 |
| 7.9.3 | Das Hookesche Werkstoffgesetz in Matrizenschreibweise | 300 |
| 7.9.4 | Das Hookesche Werkstoffgesetz für den ebenen Spannungszustand | 302 |
| 7.9.5 | Das Hookesche Werkstoffgesetz für den ebenen Verzerrungszustand . . . | 303 |
| 7.9.6 | Das Hookesche Werkstoffgesetz für den geraden Stab | 304 |
| 7.10 | Beispiele nichtlinear-elastischer Materialien | 305 |
| 7.10.1 | Allgemeingültige Darstellung der Formänderungsenergie für homogene, isotrope, hyperelastische Materialien | 305 |
| 7.10.2 | Das Ogden-Material | 306 |
| 7.10.3 | Das Neo-Hooke-Material | 307 |
| 7.10.4 | Das Mooney-Rivlin-Material | 307 |
| 7.10.5 | Ein Vergleich verschiedener Materialmodelle | 307 |
| 7.11 | Hauptspannungen und Hauptachsen des Spannungstensors | 308 |
| 7.11.1 | Hauptachsenproblem des Cauchyschen Spannungstensors | 308 |
| 7.11.2 | Das Hauptachsenproblem des ebenen Spannungszustandes | 309 |
| 7.11.3 | Additive Aufspaltung des Spannungstensors in Kugeltensor und Deviator | 310 |
| 8 | Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie | 311 |
| 8.1 | Zusammenstellung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie | 311 |
| 8.1.1 | Die geometrischen Beziehungen | 311 |
| 8.1.2 | Die dynamischen und statischen Feldgleichungen | 311 |
| 8.1.3 | Die geometrischen und statischen Randbedingungen | 312 |
| 8.1.4 | Das Werkstoffgesetz eines homogenen, isotropen, elastischen Materials . . | 312 |
| 8.1.5 | Das Randwertproblem der Elastizitätstheorie | 313 |

| | | |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.2 | Linearisierung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie | 313 |
| 8.2.1 | Die Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie | 313 |
| 8.2.2 | Das Superpositionsprinzip der Lösungen der klassischen Elastizitätstheorie | 314 |
| 8.3 | Die Herleitung der Lamé-Navierschen Verschiebungs- differentialgleichungen der klassischen linearen Elastizitätstheorie | 315 |
| 8.3.1 | Herleitung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen . . | 315 |
| 8.3.2 | Darstellung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in den Koeffizienten verschiedener Basissysteme | 316 |
| 8.3.2.1 | Die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in krümmmlinigen Koordinaten | 316 |
| 8.3.2.2 | Die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in kartesischen Koordinaten | 316 |
| 8.3.3 | Darstellung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in Matrixform | 319 |
| 8.4 | Erweiterung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen für stationäre thermoelastische Probleme | 322 |
| 8.5 | Biharmonische Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten | 323 |
| 8.6 | Biharmonische Differentialgleichung für die Spannungskomponenten . . . | 324 |
| 8.7 | Die Maxwell'schen Spannungsfunktionen | 326 |
| 8.7.1 | Einführung der Spannungsfunktionen zur Erfüllung der homogenen Gleichgewichtsbedingungen | 327 |
| 8.7.2 | Herleitung der Differentialgleichungen für die Spannungsfunktion | 328 |
| 8.7.3 | Darstellung der Maxwell'schen Spannungsfunktion für die Scheibe | 329 |
| 8.8 | Die Eigenschaften der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie . . . | 330 |
| 8.8.1 | Ein kleiner Exkurs in die Theorie der Differentialgleichungen | 331 |
| 8.8.2 | Die Poissonsche Differentialgleichung | 333 |
| 8.8.3 | Die Differentialgleichung der schwingenden Saite | 333 |
| 8.8.4 | Die Elliptizität der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie | 335 |
| 8.8.5 | Die Elliptizität der Differentialgleichungen der Membranschale | 337 |
| 8.8.6 | Das Prinzip von St. Venant | 338 |
| 8.9 | Das TONTI-Schema | 341 |
| 9 | Lösungen der Grundgleichungen der klassischen linearen Elastizitätstheorie | 343 |
| 9.1 | Der Drei-Funktionen-Ansatz nach Papkovitsch-Neuber | 344 |
| 9.1.1 | Herleitung des Drei-Funktionen-Ansatzes | 344 |
| 9.1.1.1 | Definition des Drei-Funktionen-Ansatzes | 344 |
| 9.1.1.2 | Bestimmung der Ansatzkonstanten α | 344 |
| 9.1.1.3 | Bestimmung der Spannungen aus dem Drei-Funktionen-Ansatz | 345 |
| 9.1.2 | Die Spannungsfunktion des Drei-Funktionen-Ansatzes für den ebenen Verzerrungszustand | 346 |
| 9.1.3 | Die Spannungsfunktion des Drei-Funktionen-Ansatzes für den ebenen Spannungszustand | 348 |
| 9.2 | Die direkte Herleitung der Scheibentheorie | 350 |
| 9.3 | Lösungsfunktionen der Bipotentialgleichungen | 351 |
| 9.3.1 | Bipotentialgleichungen in Zylinderkoordinaten für achsensymmetrische Probleme | 351 |
| 9.3.2 | Ebener Spannungszustand in Polarkoordinaten | 353 |
| 9.3.3 | Ebener Spannungszustand in kartesischen Koordinaten | 354 |
| 9.4 | Die elastische Halbebene unter Wirkung einer Einzellast | 355 |

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.5 | Der elastische Halbraum unter Wirkung einer Einzellast | 358 |
| 9.6 | Die Scheibe mit Loch unter einachsigen Zug | 364 |
| 10 | Arbeits- und Extremalprinzipien | 368 |
| 10.1 | Das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Arbeit in der Starrkörperdynamik | 368 |
| 10.2 | Das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Arbeit in der Elastodynamik | 370 |
| 10.3 | Das Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit | 372 |
| 10.4 | Ein kleiner Exkurs in die Variationsrechnung | 373 |
| 10.5 | Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie | 378 |
| 10.5.1 | Einführung eines Stoffgesetzes mit Potentialeigenschaft | 378 |
| 10.5.2 | Einführung von äußeren Kräften mit Potentialcharakter | 380 |
| 10.5.3 | Herleitung des Prinzips der stationären potentiellen Energie | 380 |
| 10.5.4 | Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie für die klassische lineare Elastizitätstheorie | 382 |
| 10.5.5 | Das Dirichletsche Prinzip in Matrizenform | 385 |
| 10.6 | Folgerungen aus den Arbeits- und Energieprinzipien | 385 |
| 10.6.1 | Der Satz von Clapeyron | 385 |
| 10.6.2 | Der Kirchhoffsche Eindeutigkeitssatz | 386 |
| 10.6.3 | Die Sätze von Betti und Maxwell | 387 |
| 10.6.4 | Zusammenstellung der Sätze von Castigliano, Engesser und Menabrea aus der Festigkeitslehre | 388 |
| 10.6.4.1 | Der 2. Satz von Castigliano | 389 |
| 10.6.4.2 | Der 1. Satz von Engesser | 390 |
| 10.6.4.3 | Der 1. Satz von Castigliano | 391 |
| 10.6.4.4 | Der 2. Satz von Engesser | 392 |
| 10.6.4.5 | Der Satz von Menabrea | 392 |
| 10.6.5 | Über die Gültigkeit der Sätze von Castigliano, Engesser und Menabrea für verschiedene elastische Strukturen | 393 |
| 10.7 | Die Herstellung der Differentialgleichung der Platte durch Variation des elastischen Potentials | 396 |
| 10.7.1 | Die Herleitung des elastischen Potentials der Platte | 396 |
| 10.7.2 | Die Behandlung des Variationsproblems | 398 |
| 11 | Die mathematische Behandlung der linearisierten Elastizitätstheorie | 399 |
| 11.1 | Zusammenstellung der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie | 400 |
| 11.1.1 | Das Randwertproblem der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie | 400 |
| 11.1.2 | Das Energieprinzip der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie | 401 |
| 11.1.3 | Existenz und Eindeutigkeit in der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie | 401 |
| 11.2 | Die schwache Form des Gleichgewichts | 402 |
| 11.3 | Variationsaufgaben | 404 |
| 11.3.1 | Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Variationsaufgaben | 404 |
| 11.3.2 | Beziehung der schwachen Form zu Minimalproblemen | 406 |
| 11.3.3 | Die Regularität der Lösung | 407 |
| 11.4 | Lösung der schwachen Form des Gleichgewichts | 407 |
| 11.4.1 | Die Wahl des geeigneten Hilbertraumes V | 408 |
| 11.4.2 | Die V -Elliptizität der Bilinearform | 409 |
| 12 | Einführung in die Finite-Elemente-Methode (FEM) | 410 |
| 12.1 | Vorbemerkungen | 410 |
| 12.2 | Ingenieurmäßige Darstellung der linearen FEM mit Verschiebungsansätzen in Matrixschreibweise | 412 |
| 12.2.1 | Prinzip der virtuellen Arbeit | 412 |

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.2.2 | Potentialeigenschaften der inneren und äußeren Kräfte | 413 |
| 12.2.3 | Direkte Darstellung des Dirichletprinzips | 414 |
| 12.2.4 | Einführung von Finite-Element-Ansätzen für zweidimensionale Gebiete | 415 |
| 12.2.5 | Darstellung der Element-Steifigkeitsmatrizen | 416 |
| 12.2.6 | Einführung globaler Knotenverschiebungsvektoren | 416 |
| 12.3 | Kontrollierte Genauigkeit und Effizienz der Finite-Element-Methode durch Netz- und Modelladaption | 417 |
| 12.3.1 | Heutige Aspekte der Finite-Element-Methode | 417 |
| 12.3.1.1 | Finite-Elemente-Methode | 418 |
| 12.3.1.2 | Das Genauigkeitsproblem | 418 |
| 12.3.2 | A posteriori Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren | 419 |
| 12.3.2.1 | Der residuale Fehlerschätzer nach Babuška-Miller | 420 |
| 12.3.2.2 | Der residuale Fehlerschätzer nach Johnson und Hansbo | 421 |
| 12.3.2.3 | Strategie bei der Verdichtung und Abbruchkriterien | 421 |
| 12.3.2.4 | Fehlerbetrachtungen am Beispiel einer Kragsscheibe | 422 |
| 12.3.3 | Dimensions- und Modelladaptivität | 423 |
| 12.3.3.1 | Dimensionsadaptivität an einer gevouteten Platte | 424 |
| 13 | Literatur | 425 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| Stichwortverzeichnis | 429 |
|---------------------------------------|------------|