

Der Ingenieurbau

- **Werkstoffe**
- **Elastizitätstheorie**

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Verzeichnis der Verfasser

Werkstoffe des Bauwesens

1	Einleitung und Übersicht der Werkstoffe des Bauwesens	1
2	Eigenschaften der Baustoffe im allgemeinen	2
2.1	Mechanische Eigenschaften	2
2.2	Physikalisch-chemische Erscheinungen	7
3	Anorganisch mineralische Bindemittel	11
3.1	Gips	11
3.2	Kalk	11
3.3	Zement	12
3.3.1	Portlandzement	12
3.3.2	Portland-Kompositzemente	13
3.3.3	Weitere Zemente	14
3.3.4	Hydratation der Zemente	15
3.3.5	Wasserzementwert und Porenraum	16
4	Beton	20
4.1	Betonzuschlag	20
4.1.1	Arten und Anforderungen	20
4.1.2	Kornzusammensetzung	22
4.2	Zugabewasser	23
4.3	Frischbeton	23
4.3.1	Eigenschaften	23
4.3.2	Konsistenzmessungen	25
4.4	Grüner Beton	25
4.4.1	Grünfestigkeit	26
4.4.2	Setzen und Kapillarschwinden	27
4.5	Junger Beton	27
4.6	Festbeton	31
4.6.1	Druckfestigkeit	32
4.6.1.1	Innere Einflüsse	32
4.6.1.2	Äußere Einflüsse	33
4.6.1.3	Art und Dauer der Belastung	34
4.6.2	Zugfestigkeit	37
4.6.3	Verformungsverhalten	37
4.6.3.1	Druckbeanspruchung	37
4.6.3.2	Zugbeanspruchung	38
4.6.4	Zeitabhängiges Verformungsverhalten	40
4.6.4.1	Schwinden und Quellen	41
4.6.4.2	Kriechen und Relaxation	43

4.6.5	Physikalische Eigenschaften	45
4.6.5.1	Wasserdurchlässigkeit	45
4.6.5.2	Luftdurchlässigkeit	46
4.6.5.3	Diffusion	47
4.6.5.4	Thermische Eigenschaften	48
4.6.6	Langzeitverhalten	49
4.6.6.1	Widerstand gegen physikalische Beanspruchungen	50
4.6.6.2	Widerstand gegen chemische Beanspruchung	52
4.6.6.3	Korrosion der Bewehrung	54
5	Leichtbeton	55
5.1	Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge	55
5.2	Leichtbeton mit haufwerksporigem Gefüge	59
5.3	Porenleichtbeton (Schaumbeton)	59
5.4	Porenbeton	60
6	Faserbeton	60
6.1	Allgemeine Gesichtspunkte	60
6.2	Stahlfaserbeton	63
6.3	Beton mit mineralischen Fasern	64
6.4	Beton mit organischen Fasern	65
6.5	Ferrozement	66
7	Naturstein	67
8	Keramische Baustoffe und Glas	70
8.1	Ausgangsstoffe	70
8.2	Ziegel- und Tonwaren	70
8.3	Glas	71
9	Metalle	72
9.1	Aufbau und Struktur	72
9.2	Phasendiagramme	74
9.3	Thermische und mechanische Behandlungen	76
9.4	Korrosion	80
9.5	Stahl	82
9.5.1	Einteilung und Prüfungen	82
9.5.2	Baustähle	84
9.5.3	Betonstähle	90
9.5.4	Spannstähle	93
9.5.5	Nichtrostende Stähle	96
9.6	Eisen-Gußwerkstoffe	97
9.7	Aluminiumlegierungen	97
9.7.1	Zusammensetzung	97
9.7.2	Mechanische Eigenschaften	99
9.7.3	Korrosion	103
10	Holz und Holzwerkstoffe	104
10.1	Holz	104
10.1.1	Aufbau	104
10.1.2	Physikalische Eigenschaften	105
10.1.3	Mechanische Eigenschaften	107
10.1.4	Chemische und biologische Einwirkungen	108
10.2	Holzwerkstoffe	109
10.2.1	Aufbau	109
10.2.2	Physikalische Eigenschaften	110

10.2.3	Mechanische Eigenschaften	110
11	Kunststoffe	111
11.1	Einleitung	111
11.2	Herstellung und Struktur von Kunststoffen	112
11.2.1	Polymerisation	112
11.2.2	Polykondensation, Polyaddition	114
11.2.3	Bindung und Struktur des Polymermoleküls	114
11.3	Thermomechanisches Verhalten	115
11.4	Zeiteinflüsse auf das mechanische Verhalten	119
11.5	Anwendungsbeispiele	123
12	Literatur	131

~5

Werkstoffmechanik

1	Einführung	133
2	Grundbegriffe	133
2.1	Spannung	133
2.2	Verzerrung	137
2.3	Klassifizierung des Werkstoffverhaltens	139
3	Elastizität	140
3.1	Linear elastisches Material	140
3.1.1	Verallgemeinertes Hookesches Gesetz	140
3.1.2	Isotropie	141
3.1.3	Orthotropie, Transversale Isotropie	143
3.2	Nichtlinear elastisches Material	144
4	Viskoelastizität	145
4.1	Allgemeines	145
4.2	Viskose Newtonsche Flüssigkeit	146
4.3	Materialmodelle	147
4.4	Stoffgesetz der Viskoelastizität	149
4.5	Elastisch-viskoelastische Analogie	150
4.6	Elastische Näherung	151
5	Plastizität	151
5.1	Allgemeines	151
5.2	Einfache Materialmodelle	152
5.3	Stoffgesetz der Plastizität	153
5.3.1	Fließbedingung	153
5.3.2	Fließregel	155
6	Werkstoffversagen, Bruch	156
6.1	Grundbegriffe	156
6.2	Festigkeitshypothesen	158
6.2.1	Hauptspannungshypothese	158
6.2.2	Hauptdehnungshypothese	159
6.2.3	Formänderungsenergiehypothese	159
6.2.4	Coulomb-Mohr-Hypothese	159
6.3	Elemente der Bruchmechanik	160
6.3.1	Allgemeines	160
6.3.2	K-Konzept	161

Elastizitätstheorie

1	Einleitung	165
1.1	Übersicht	165
1.2	Bemerkungen zur historischen Entwicklung der Kontinuumsmechanik fester Körper	167
1.3	Grundlagen der Kontinuumsmechanik fester Körper	168
1.3.1	Der materielle Körper und seine Eigenschaften	168
1.3.2	Die Beschreibung der Lage und Bewegung des materiellen Körpers	169
1.3.3	Die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik	170
1.3.4	Die konstitutiven Gleichungen	170
1.3.5	Das Aufgabengebiet der Elastizitätstheorie	171
1.3.6	Die mathematische Behandlung der Elastizitätstheorie	171
1.3.7	Einführung in die Finite-Elemente-Methode	172
2	Lage und Bewegung des materiellen Körpers	172
2.1	Grundlagen	172
2.1.1	Die deterministische Theorie	172
2.1.2	Die mathematische Beschreibung der physikalischen Ereignisse	172
2.1.2.1	Die Beschreibung des Anschauungsraumes \mathcal{E}_t	173
2.1.2.2	Die Beschreibung des Raumes \mathcal{T} der betrachteten Zeitpunkte	174
2.1.2.3	Die Einführung des Beobachters Σ	174
2.1.2.4	Vereinbarungen und Bezeichnungen	174
2.2	Beschreibung der Lage des materiellen Körpers \mathcal{B} in Abhängigkeit der materiellen Punkte \mathcal{M}	175
2.3	Veranschaulichung der mathematischen Forderungen	176
2.3.1	Injectivität, Surjektivität und Bijektivität der Abbildung $\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$	176
2.3.2	Stetigkeit der Abbildung $\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$	178
2.3.3	Stetigkeit der Abbildung $\chi_M: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$	179
2.4	Einführung der Referenzkonfiguration B_0	179
2.5	Betrachtungsweisen der Bewegung des materiellen Körpers \mathcal{B}	181
2.5.1	Darstellung der Bewegung in Abhängigkeit der materiellen Punkte \mathcal{M}	182
2.5.2	Die materielle oder Lagrangesche Betrachtungsweise	182
2.5.3	Die räumliche oder Eulersche Betrachtungsweise	183
2.5.4	Die relative Beschreibung der Bewegung	183
2.6	Bemerkungen zum Wechsel des Beobachters	184
2.7	Bemerkungen zum Wechsel der Referenzkonfiguration	186
2.8	Bemerkungen zum Wechsel des Koordinatensystems	187
3	Deformationen und Verzerrungen	188
3.1	Grundlagen und Vereinbarungen	189
3.2	Der materielle Deformationsgradient F	191
3.3	Multiplikative oder polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten F	193
3.4	Der Greensche Verzerrungstensor E	195
3.4.1	Anschauliche Einführung des Greenschen Verzerrungstensors E	195
3.4.2	Herleitung des Greenschen Verzerrungstensors E mit Hilfe der Differenz der Quadrate der Linienelemente im verformten und unverformten Zustand	197
3.4.3	Darstellung des Greenschen Verzerrungstensors E in konvektiven Koordinaten durch die Differenz der Metriktenoren in der Momentan- und der Referenzkonfiguration	198

3.4.4	Darstellung des Greenschen Verzerrungstensors E mit Hilfe des materiellen Verschiebungsgradienten H	200
3.4.5	Vergleich des Greenschen Verzerrungstensors E mit den Ingenieurverzerrungen γ	201
3.5	Der Almansische Verzerrungstensor $E^{(A)}$	203
3.6	Hauptachsentransformation der Verzerrungstensoren	204
3.6.1	Hauptachsentransformation des Rechts-Streck-Tensors U	205
3.6.2	Hauptachsentransformation des Links-Streck-Tensors V	206
3.6.3	Spektraldarstellung der Verzerrungstensoren	206
3.6.4	Einführung weiterer Verzerrungstensoren	207
3.6.5	Das Cauchysche Dehnungsellipsoid	207
3.7	Multiplikative Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten in volumetrische und isochore Anteile	209
3.8	Additive Aufspaltung des Greenschen Verzerrungstensors E in Kugeltensor E^K und Deviator E^D	210
3.9	Verträglichkeitsbedingungen für die linearen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen	211
3.10	Transformation geometrischer Größen von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration	213
3.10.1	Pull-Back und Push-Forward-Operationen	213
3.10.2	Transformation der Linienelemente	214
3.10.3	Transformation der Volumenelemente	215
3.10.4	Transformation der Flächenelemente	216
4	Zeitliche Ableitungen	216
4.1	Materielle Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen	216
4.1.1	Materielle Darstellung der materiellen Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen	217
4.1.2	Räumliche Darstellung der materiellen Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen	217
4.2	Materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen	218
4.2.1	Materielle Darstellung der materiellen Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen	218
4.2.2	Räumliche Darstellung der materiellen Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen	218
4.2.3	Beispiel für die materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen	219
4.3	Materielle Zeitableitung geometrischer Größen	219
4.3.1	Die materielle Zeitableitung des Linienelementes dx	220
4.3.2	Die materielle Zeitableitung der Jacobi-Determinante $\det F$	220
4.3.3	Die zeitliche Ableitung des Volumenelementes dv	222
4.3.4	Die zeitliche Ableitung des Oberflächenelementes da	222
4.4	Transformationsbeziehungen beim Wechsel des Beobachters – Beobachterinvarianz physikalischer Größen	222
4.5	Untersuchung der Beobachterinvarianz zeitlicher Ableitungen	225
4.5.1	Untersuchung der Objektivität der Geschwindigkeit $v(x, t)$	225
4.5.2	Untersuchung der Objektivität der Beschleunigung $a(x, t)$	226
5	Die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik	227
5.1	Satz von der Erhaltung der Masse	227
5.2	Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße	229
5.2.1	Räumliche Darstellung	229
5.2.2	Materielle Darstellung	231

5.3	Einführung mechanischer Spannungen	231
5.3.1	Einführung des Spannungsvektors t und des Cauchyschen Spannungstensors T in der Momentankonfiguration B_t	232
5.3.1.1	Einführung des Spannungsvektors t	232
5.3.1.2	Das Cauchy-Postulat	232
5.3.1.3	Das Cauchy-Fundamentallemma	233
5.3.1.4	Das Cauchy-Theorem	234
5.3.2	Darstellung der dynamischen Feldgleichungen in der Momentankonfiguration	237
5.3.2.1	Herleitung der dynamischen Feldgleichungen	237
5.3.2.2	Indexschreibweise der dynamischen Feldgleichungen	238
5.3.3	Materielle Darstellung des Spannungsvektors t und des Cauchyschen Spannungstensors T in der Referenzkonfiguration B_0	239
5.3.3.1	Transformation der eingeprägten Volumenkraftdichte \bar{b}	239
5.3.3.2	Transformation der eingeprägten Oberflächenkraftdichte $\bar{t}(x, t, n)$	240
5.3.3.3	Transformation des Spannungsvektors $t(x, t, n)$ und Einführung der Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren	240
5.3.4	Darstellung der dynamischen Feldgleichungen in der Referenzkonfiguration	242
5.4	Der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses	242
5.4.1	Räumliche Darstellung	243
5.4.2	Materielle Betrachtungsweise	245
5.4.2.1	Betrachtung des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors P	246
5.4.2.2	Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors S	246
5.5	Der Bilanzsatz der kinetischen Energie	246
5.5.1	Herleitung des Bilanzsatzes der kinetischen Energie	246
5.5.2	Einführung der Elementarleistung und arbeitskonformer Paarungen von Spannungs- und Verzerrungstensoren	248
5.6	Der Energieerhaltungssatz	251
5.6.1	Der Erhaltungssatz der gesamten mechanischen und thermischen Energie	251
5.6.2	Die lokale Formulierung des Energieerhaltungssatzes	252
5.7	Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik	253
5.8	Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik	254
6	Zusammenstellung und Linearisierung der stoffunabhängigen Gleichungen	257
6.1	Zusammenstellung der stoffunabhängigen Gleichungen	258
6.2	Mathematische Grundlagen der Linearisierung	259
6.2.1	Linearisierung reellwertiger Funktionen einer Veränderlichen	259
6.2.2	Linearisierung skalarwertiger Funktionen mehrerer Veränderlicher	260
6.2.3	Linearisierung vektor- und tensorwertiger Funktionen	261
6.3	Linearisierung der stoffunabhängigen Gleichungen	261
6.3.1	Linearisierung der kinematischen Beziehungen	262
6.3.1.1	Linearisierung des materiellen Deformationsgradienten	262
6.3.1.2	Linearisierung des räumlichen Deformationsgradienten	262
6.3.1.3	Linearisierung des Greenschen Verzerrungstensors	263
6.3.1.4	Linearisierung des Almansischen Verzerrungstensors	263
6.3.1.5	Linearisierung der Determinante des materiellen Deformationsgradienten	264
6.3.1.6	Linearisierung der polaren Zerlegung	265
6.3.2	Linearisierung der Spannungstensoren	267
6.3.3	Linearisierung der Feldgleichungen	268

7	Die konstitutiven Gleichungen elastischer Materialien	269
7.1	Allgemeines	269
7.2	Allgemeingültige Prinzipien zur Aufstellung von Materialgleichungen	270
7.3	Die Definition des elastischen Materials	274
7.3.1	Der Übergang von der allgemeinen Materialtheorie zum elastischen Material	274
7.3.2	Das Hookesche Werkstoffgesetz	276
7.4	Folgerungen aus dem Potentialcharakter der Formänderungsenergie	277
7.4.1	Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse	277
7.4.2	Darstellung der Spannungstensoren aus der Formänderungsenergiefunktion	279
7.4.3	Herleitung der Materialtensoren	280
7.4.4	Folgerungen für den Materialtensor aus dem Potentialcharakter der Formänderungsenergie	281
7.5	Das Prinzip der materiellen Objektivität und die Auswirkungen auf die Darstellungsformen der konstitutiven Gleichungen elastischer Materialien	281
7.6	Die Materialgleichungen isotroper elastischer Materialien	284
7.6.1	Der Einfluß der Referenzkonfiguration auf den Deformationsgradienten .	284
7.6.2	Das Prinzip der materiellen Symmetrie	285
7.6.3	Das Materialgesetz homogener, isotroper, elastischer Materialien	287
7.6.4	Die Formänderungsenergiefunktion eines homogenen, isotropen, hyperelastischen Materials	288
7.7	Das Verhalten der konstitutiven Gleichungen in der Umgebung der Referenzkonfiguration	289
7.8	Das St. Venant-Kirchhoff-Material als Beispiel einer linearen elastischen Materialgleichung	291
7.9	Das Hookesche Werkstoffgesetz	293
7.9.1	Herleitung des Hookeschen Werkstoffgesetzes	293
7.9.2	Bestimmung der Lamé-Parameter λ und μ	295
7.9.3	Das Hookesche Werkstoffgesetz in Matrzenschreibweise	300
7.9.4	Das Hookesche Werkstoffgesetz für den ebenen Spannungszustand	302
7.9.5	Das Hookesche Werkstoffgesetz für den ebenen Verzerrungszustand	303
7.9.6	Das Hookesche Werkstoffgesetz für den geraden Stab	304
7.10	Beispiele nichtlinear-elastischer Materialien	305
7.10.1	Allgemeingültige Darstellung der Formänderungsenergie für homogene, isotrope, hyperelastische Materialien	305
7.10.2	Das Ogden-Material	306
7.10.3	Das Neo-Hooke-Material	307
7.10.4	Das Mooney-Rivlin-Material	307
7.10.5	Ein Vergleich verschiedener Materialmodelle	307
7.11	Hauptspannungen und Hauptachsen des Spannungstensors	308
7.11.1	Hauptachsenproblem des Cauchyschen Spannungstensors	308
7.11.2	Das Hauptachsenproblem des ebenen Spannungszustandes	309
7.11.3	Additive Aufspaltung des Spannungstensors in Kugeltensor und Deviator	310
8	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	311
8.1	Zusammenstellung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	311
8.1.1	Die geometrischen Beziehungen	311
8.1.2	Die dynamischen und statischen Feldgleichungen	311
8.1.3	Die geometrischen und statischen Randbedingungen	312
8.1.4	Das Werkstoffgesetz eines homogenen, isotropen, elastischen Materials	312
8.1.5	Das Randwertproblem der Elastizitätstheorie	313

8.2	Linearisierung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	313
8.2.1	Die Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie	313
8.2.2	Das Superpositionsprinzip der Lösungen der klassischen Elastizitätstheorie	314
8.3	Die Herleitung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen der klassischen linearen Elastizitätstheorie	315
8.3.1	Herleitung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen	315
8.3.2	Darstellung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in den Koeffizienten verschiedener Basissysteme	316
8.3.2.1	Die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in krummlinigen Koordinaten	316
8.3.2.2	Die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in kartesischen Koordinaten	316
8.3.3	Darstellung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in Matrixform	319
8.4	Erweiterung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen für stationäre thermoelastische Probleme	322
8.5	Biharmonische Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten	323
8.6	Biharmonische Differentialgleichung für die Spannungskomponenten . .	324
8.7	Die Maxwellschen Spannungsfunktionen	326
8.7.1	Einführung der Spannungsfunktionen zur Erfüllung der homogenen Gleichgewichtsbedingungen	327
8.7.2	Herleitung der Differentialgleichungen für die Spannungsfunktion	328
8.7.3	Darstellung der Maxwellschen Spannungsfunktion für die Scheibe . . .	329
8.8	Die Eigenschaften der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie . .	330
8.8.1	Ein kleiner Exkurs in die Theorie der Differentialgleichungen	331
8.8.2	Die Poissonsche Differentialgleichung	333
8.8.3	Die Differentialgleichung der schwingenden Saite	333
8.8.4	Die Elliptizität der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	335
8.8.5	Die Elliptizität der Differentialgleichungen der Membranschale	337
8.8.6	Das Prinzip von St. Venant	338
8.9	Das TONTI-Schema	341
9	Lösungen der Grundgleichungen der klassischen linearen Elastizitätstheorie	343
9.1	Der Drei-Funktionen-Ansatz nach Papkovitsch-Neuber	344
9.1.1	Herleitung des Drei-Funktionen-Ansatzes	344
9.1.1.1	Definition des Drei-Funktionen-Ansatzes	344
9.1.1.2	Bestimmung der Ansatzkonstanten α	344
9.1.1.3	Bestimmung der Spannungen aus dem Drei-Funktionen-Ansatz	345
9.1.2	Die Spannungsfunktion des Drei-Funktionen-Ansatzes für den ebenen Verzerrungszustand	346
9.1.3	Die Spannungsfunktion des Drei-Funktionen-Ansatzes für den ebenen Spannungszustand	348
9.2	Die direkte Herleitung der Scheibentheorie	350
9.3	Lösungsfunktionen der Bipotentialgleichungen	351
9.3.1	Bipotentialgleichungen in Zylinderkoordinaten für achsensymmetrische Probleme	351
9.3.2	Ebener Spannungszustand in Polarkoordinaten	353
9.3.3	Ebener Spannungszustand in kartesischen Koordinaten	354
9.4	Die elastische Halbebene unter Wirkung einer Einzellast	355

9.5	Der elastische Halbraum unter Wirkung einer Einzellast	358
9.6	Die Scheibe mit Loch unter einachsigem Zug	364
10	Arbeits- und Extremalprinzipien	368
10.1	Das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Arbeit in der Starrkörperdynamik	368
10.2	Das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Arbeit in der Elastodynamik	370
10.3	Das Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit	372
10.4	Ein kleiner Exkurs in die Variationsrechnung	373
10.5	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	378
10.5.1	Einführung eines Stoffgesetzes mit Potentialeigenschaft	378
10.5.2	Einführung von äußeren Kräften mit Potentialcharakter	380
10.5.3	Herleitung des Prinzips der stationären potentiellen Energie	380
10.5.4	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie für die klassische lineare Elastizitätstheorie	382
10.5.5	Das Dirichletsche Prinzip in Matrizenform	385
10.6	Folgerungen aus den Arbeits- und Energieprinzipien	385
10.6.1	Der Satz von Clapeyron	385
10.6.2	Der Kirchhoffsche Eindeutigkeitssatz	386
10.6.3	Die Sätze von Betti und Maxwell	387
10.6.4	Zusammenstellung der Sätze von Castigliano, Engesser und Menabrea aus der Festigkeitslehre	388
10.6.4.1	Der 2. Satz von Castigliano	389
10.6.4.2	Der 1. Satz von Engesser	390
10.6.4.3	Der 1. Satz von Castigliano	391
10.6.4.4	Der 2. Satz von Engesser	392
10.6.4.5	Der Satz von Menabrea	392
10.6.5	Über die Gültigkeit der Sätze von Castigliano, Engesser und Menabrea für verschiedene elastische Strukturen	393
10.7	Die Herstellung der Differentialgleichung der Platte durch Variation des elastischen Potentials	396
10.7.1	Die Herleitung des elastischen Potentials der Platte	396
10.7.2	Die Behandlung des Variationsproblems	398
11	Die mathematische Behandlung der linearisierten Elastizitätstheorie	399
11.1	Zusammenstellung der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie	400
11.1.1	Das Randwertproblem der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie	400
11.1.2	Das Energieprinzip der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie	401
11.1.3	Existenz und Eindeutigkeit in der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie	401
11.2	Die schwache Form des Gleichgewichts	402
11.3	Variationsaufgaben	404
11.3.1	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Variationsaufgaben	404
11.3.2	Beziehung der schwachen Form zu Minimalproblemen	406
11.3.3	Die Regularität der Lösung	407
11.4	Lösung der schwachen Form des Gleichgewichts	407
11.4.1	Die Wahl des geeigneten Hilbertraumes V	408
11.4.2	Die V -Elliptizität der Bilinearform	409
12	Einführung in die Finite-Elemente-Methode (FEM)	410
12.1	Vorbemerkungen	410
12.2	Ingenieurmäßige Darstellung der linearen FEM mit Verschiebungsansätzen in Matrzenschreibweise	412
12.2.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	412

12.2.2	Potentialeigenschaften der inneren und äußeren Kräfte	413
12.2.3	Direkte Darstellung des Dirichletprinzips	414
12.2.4	Einführung von Finite-Element-Ansätzen für zweidimensionale Gebiete	415
12.2.5	Darstellung der Element-Steifigkeitsmatrizen	416
12.2.6	Einführung globaler Knotenverschiebungsvektoren	416
12.3	Kontrollierte Genauigkeit und Effizienz der Finite-Element-Methode durch Netz- und Modelladaption	417
12.3.1	Heutige Aspekte der Finite-Element-Methode	417
12.3.1.1	Finite-Elemente-Methode	418
12.3.1.2	Das Genauigkeitsproblem	418
12.3.2	A posteriori Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren	419
12.3.2.1	Der residuale Fehlerschätzer nach Babuška-Miller	420
12.3.2.2	Der residuale Fehlerschätzer nach Johnson und Hansbo	421
12.3.2.3	Strategie bei der Verdichtung und Abbruchkriterien	421
12.3.2.4	Fehlerbetrachtungen am Beispiel einer Kragscheibe	422
12.3.3	Dimensions- und Modelladaptivität	423
12.3.3.1	Dimensionsadaptivität an einer gevouteten Platte	424
13	Literatur	425
	Stichwortverzeichnis	429