
Springer-Handbuch der Mathematik II

Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew
Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler
Herausgegeben von E. Zeidler

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
2 Algebra	1
2.1 Elementare Methoden	1
2.1.1 Kombinatorik	1
2.1.2 Determinanten	4
2.1.3 Matrizen	8
2.1.4 Lineare Gleichungssysteme	12
2.1.5 Das Rechnen mit Polynomen	18
2.1.6 Der Fundamentalsatz der klassischen Algebra von Gauß	20
2.1.7 Partialbruchzerlegung	27
2.2 Matrizenkalkül	28
2.2.1 Das Spektrum einer Matrix	28
2.2.2 Normalformen von Matrizen	30
2.2.3 Matrizenfunktionen	38
2.3 Lineare Algebra	40
2.3.1 Grundideen	40
2.3.2 Lineare Räume	41
2.3.3 Lineare Operatoren	43
2.3.4 Das Rechnen mit linearen Räumen	48
2.3.5 Dualität	52
2.4 Multilineare Algebra	53
2.4.1 Algebren	54
2.4.2 Das Rechnen mit Multilinearformen	54
2.4.3 Universelle Produkte	60
2.4.4 Liealgebren	64
2.4.5 Superalgebren	65
2.5 Algebraische Strukturen	66
2.5.1 Gruppen	66
2.5.2 Ringe	72
2.5.3 Körper	75
2.6 Galoistheorie und algebraische Gleichungen	78
2.6.1 Die drei berühmten Probleme der Antike	78
2.6.2 Der Hauptsatz der Galoistheorie	78
2.6.3 Der verallgemeinerte Fundamentalsatz der Algebra	81
2.6.4 Klassifikation von Körpererweiterungen	82
2.6.5 Der Hauptsatz über Gleichungen, die durch Radikale lösbar sind	83
2.6.6 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	85
2.7 Zahlentheorie	88
2.7.1 Grundideen	88
2.7.2 Der Euklidische Algorithmus	90
2.7.3 Die Verteilung der Primzahlen	93
2.7.4 Additive Zerlegungen	99
2.7.5 Die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen und Kettenbrüche	102
2.7.6 Transzendente Zahlen	108

2.7.7	Anwendung auf die Zahl π	111
2.7.8	Gaußsche Kongruenzen	116
2.7.9	Minkowskis Geometrie der Zahlen	119
2.7.10	Das fundamentale Lokal-Global-Prinzip der Zahlentheorie	119
2.7.11	Ideale und höhere Teilbarkeitslehre	121
2.7.12	Anwendungen auf quadratische Zahlkörper	123
2.7.13	Die analytische Klassenzahlformel	125
2.7.14	Die Hilbertsche Klassenkörpertheorie für allgemeine Zahlkörper	126
Literatur zu Kapitel 2		127
3	Geometrie	129
3.1	Die Grundidee der Geometrie (Erlanger Programm)	129
3.2	Elementare Geometrie	130
3.2.1	Ebene Trigonometrie	131
3.2.2	Anwendungen in der Geodäsie	138
3.2.3	Sphärische Trigonometrie	140
3.2.4	Anwendungen im Schiffs- und Flugverkehr	146
3.2.5	Die Hilbertschen Axiome der Geometrie	147
3.2.6	Das Parallelenaxiom des Euklid	151
3.2.7	Die nichteuklidische elliptische Geometrie	151
3.2.8	Die nichteuklidische hyperbolische Geometrie	152
3.3	Anwendungen der Vektoralgebra in der analytischen Geometrie	155
3.3.1	Geraden in der Ebene	155
3.3.2	Geraden und Ebenen im Raum	157
3.3.3	Volumina	159
3.4	Euklidische Geometrie (Geometrie der Bewegungen)	159
3.4.1	Die euklidische Bewegungsgruppe	159
3.4.2	Kegelschnitte	160
3.4.3	Flächen zweiter Ordnung	163
3.5	Projektive Geometrie	167
3.5.1	Grundideen	167
3.5.2	Projektive Abbildungen	169
3.5.3	Der n -dimensionale reelle projektive Raum	170
3.5.4	Der n -dimensionale komplexe projektive Raum	172
3.5.5	Die Klassifikation der ebenen Geometrien	173
3.6	Differentialgeometrie	176
3.6.1	Ebene Kurven	177
3.6.2	Raumkurven	183
3.6.3	Die lokale Gaußsche Flächentheorie	187
3.6.4	Globale Gaußsche Flächentheorie	197
3.7	Beispiele für ebene Kurven	198
3.7.1	Einhüllende und Kaustik	198
3.7.2	Evoluten	198
3.7.3	Evolventen	199
3.7.4	Die Traktrix von Huygens und die Kettenlinie	200
3.7.5	Die Lemniskate von Jakob Bernoulli und die Cassinischen Kurven	201
3.7.6	Die Lissajou-Kurven	202
3.7.7	Spiralen	202
3.7.8	Strahlkurven (Konchoiden)	204
3.7.9	Radkurven	205

3.8	Algebraische Geometrie	209
3.8.1	Grundideen	209
3.8.2	Beispiele ebener algebraischer Kurven	218
3.8.3	Anwendungen in der Integralrechnung	223
3.8.4	Die projektiv-komplexe Form einer ebenen algebraischen Kurve	225
3.8.5	Das Geschlecht einer Kurve	229
3.8.6	Diophantische Geometrie	232
3.8.7	Analytische Mengen und der Vorbereitungssatz von Weierstraß	238
3.8.8	Die Auflösung von Singularitäten	239
3.8.9	Die Algebraisierung der modernen algebraischen Geometrie	241
3.9	Geometrien der modernen Physik	242
3.9.1	Grundideen	242
3.9.2	Unitäre Geometrie, Hilberträume und Elementarteilchen	245
3.9.3	Pseudounitäre Geometrie	252
3.9.4	Minkowskigeometrie	255
3.9.5	Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie	259
3.9.6	Spingeometrie und Fermionen	265
3.9.7	Fast komplexe Strukturen	274
3.9.8	Symplektische Geometrie	274
	Literatur zu Kapitel 3	276
4	Grundlagen der Mathematik	281
4.1	Der Sprachgebrauch in der Mathematik	281
4.1.1	Wahre und falsche Aussagen	281
4.1.2	Implikationen	282
4.1.3	Tautologien und logische Gesetze	284
4.2	Beweismethoden	286
4.2.1	Indirekte Beweise	286
4.2.2	Induktionsbeweise	286
4.2.3	Eindeutigkeitsbeweise	287
4.2.4	Existenzbeweise	287
4.2.5	Die Notwendigkeit von Beweisen im Computerzeitalter	289
4.2.6	Falsche Beweise	291
4.3	Anschauliche Mengentheorie	292
4.3.1	Grundideen	292
4.3.2	Das Rechnen mit Mengen	294
4.3.3	Abbildungen	297
4.3.4	Gleichmächtige Mengen	301
4.3.5	Relationen	302
4.3.6	Mengensysteme	304
4.4	Mathematische Logik	305
4.4.1	Aussagenlogik	305
4.4.2	Prädikatenlogik	308
4.4.3	Die Axiome der Mengentheorie	310
4.4.4	Cantors Strukturierung des Unendlichen	311
4.5	Geschichte der axiomatischen Methode	314
	Literatur zu Kapitel 4	317
	Index	318