

Wolfgang Schneider

Der Kalmanfilter als  
Instrument zur Diagnose und  
Schätzung variabler Parameter  
in ökonomischen Modellen

Mit 4 Abbildungen



Physica-Verlag Heidelberg Wien

<u>Teil I:</u> Bedeutung und Ursachen veränderlicher Parameter in der quantitativen Ökonomie: statistische Methoden zu ihrer Erkennung und Schätzung	1
1. Auf der Suche nach stabilen Parametern des "datener- zeugenden Prozesses": Problem der "strukturellen" Schätzung in der Ökonometrie	2
1.1. Vorbemerkungen	2
1.2. Ein ökonometrisch-statistisches Rahmenmodell	4
1.3. Die Reduktion und Reparametrisierung des Total- modells: die Zulässigkeit der Reduktion für In- ferenz, Prognose und Simulation bei Interventi- onen in den "erklärenden" Variablen mit den zu- gehörigen Exogenitätskonzepten	15
1.4. Ein kleines Beispiel mit einer Illustration der LUCAS-Kritik - eine Erklärung von Parameterin- stabilitäten aus Sicht der Theorie "rationaler Erwartungen"	22
<u>Exkurs:</u> WOLD-STROTZ-Transformationen, Vorherbe- stimmtheit und strenge Exogenität in einem stationären AR-Modell	29
1.5. Die Rehabilitierung der reduzierten Form: eine Darstellung der SIMS-Kritik an der Ökonomie und Ökonometrie "rationaler Erwartungen"	34
1.6. Abschließende Bemerkungen: Ursachen variabler Regressionsparameter und ein Ansatz ihrer Modellierung	41

	Seite
2. Schätzung variabler Parameter : ein kurzer Überblick traditioneller Ansätze	45
2.1. Vorbemerkungen	45
2.2. Eine kurze Diskussion dynamischer Regressions- modelle und nichtrekursiver Schätzverfahren	48
2.2.1. Diskrete Parametervariation	48
2.2.2. Systematische und autoregressive Parametervaria- tion: nichtrekursive Schätzung des Parameterver- laufs in einem Aitken-Modell	51
2.3. Das Verfahren der exponentiellen Glättung in einer Interpretation als adaptives Verfahren und als Spezialfall eines Kalmanfilters	60
3. Abriß der weiteren Vorgehensweise: Leitfaden und Zusammenfassung	72
 <u>Teil II:</u> Rekursive Schätzung der zeitabhängigen stochas- tischen Koeffizienten in einem verallgemeiner- ten Regressionsmodell: Zustandsschätzung in ei- nem vollspezifizierten dynamischen linearen Mo- dell mit Hilfe des Kalmanfilters	
1. Das Zustandsraummodell ( Das "dynamische lineare Modell" )	82
1.1. Das allgemeine Zustandsraummodell	82
1.2. Das lineare Zustandsraummodell	86
1.3. Interpretationen des Zustandsraummodells: ein Überblick	90

	Seite
2. Alternative Herleitungen und Interpretationen der Kalmanfiltergleichungen	100
2.1. Ein Bayesianischer (entscheidungstheoretischer) Modellrahmen	100
2.1.1. Die rekursive Berechnung von a posteriori Dichten in einem allgemeinen Zustandsraummodell	100
2.1.2. Ableitung von Bayesregeln in einem vereinfachten dynamischen linearen Modell	104
2.2. Kleinstquadratschätzer: Definition und elementare Eigenschaften	106
2.3. Ableitung der Kalmanfiltergleichungen durch rekursive Berechnung bedingter Normalverteilungen	110
2.3.1. Rekursionsgleichungen für die Filterlösung	110
2.3.2. Interpretation der Filterstruktur	118
2.4. Der lineare Kleinstquadratschätzer	120
2.4.1. Definition und elementare Eigenschaften	120
2.4.2. Die Innovationsfolge und ihre Eigenschaften	126
2.5. Ableitung der Kalmanfiltergleichungen durch schrittweise Regression auf die Glieder einer Innovationsfolge	130
2.5.1. Rekursionsgleichungen für die Filterlösung	130
2.5.2. Parallelen zur "Aitken-Schätzung" und "gemischten" Schätzung	136
2.6. Approximation von Zufallsvariablen in Hilberträumen - Kalmanfilter als rekursive Projektionen	139
2.6.1. Approximation von Vektoren eines Hilbertraumes durch Vektoren eines Unterraumes	139
2.6.2. Interpretation des Kalmanfilter-Algorithmus als rekursive Projektionen in einem Hilbertraum	146
2.7. Anwendungsbeispiele	150
2.7.1. Sequentielle Regression und rekursive Residuen	150
2.7.2. Die Bestimmung einer optimalen Glättungskonstanten im Rahmen der Schätzung permanenter Zeitreihenkomponenten	153
2.7.3. Die Verwendung des Kalmanfilters zur Beschreibung von Informationsstrukturen in dynamischen Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit	156

	Seite
3. Vervollständigung der Schätzaufgaben:	
Herleitung der Glättungs- und Prognoselösung	162
3.1. Vorbemerkungen	162
3.2. Herleitung der Glättungslösung	163
3.3. Herleitung der Prognoselösung	167
4. Numerische Varianten der Kalmanfilter-Gleichungen	169
4.1. Vorbemerkungen	169
4.2. Hilfsmittel	170
4.2.1. Cholesky-Wurzeln einer positiv definiten, symmetrischen Matrix	170
4.2.2. Die Householder-Transformation	173
4.2.3. Konstruktion linearer Kleinstquadratschätzer mit Hilfe von Householder-Transformationen	177
4.2.4. Ein Matrixinversionssatz	179
4.3. Der Kovarianzfilter in Standardform	180
4.4. Der Kovarianzfilter in Wurzelform	183
4.5. Der Informationsfilter in Standardform	187
4.5.1. Die Filterlösung	187
4.5.2. Die Glättungslösung	189
4.6. Der Informationsfilter in Wurzelform	196
4.6.1. Die Filterlösung	196
4.6.2. Die Glättungslösung	206
5. Erweiterungen des dynamischen linearen Grundmodells	212
5.1. Das dynamische lineare Modell mit zeitabhängigen Modellmatrizen und kontemporär korrelierten Stör- termen in der Beobachtungs- und Übergangsglei- chung	212
5.1.1. Die Filterlösung	212
5.1.2. Die Glättungslösung	216

	Seite
5.2. Die Berücksichtigung verzögert endogener Variabler unter den erklärenden Variablen eines Zustandsraumes	218
5.2.1. Die Filterlösung	218
5.2.2. Die Innovationsfolge	221
5.2.3. Die Glättungslösung (für festes und variables Glättungsintervall)	225
6. Stabilitätseigenschaften der Kalmanfilter-Rekursionsgleichungen	233
7. Sensitivitätseigenschaften des Kalmanfilters in einem fehlspezifizierten dynamischen linearen Modell	249
8. Nichtlineare Kalmanfilter-Rekursionen	256
8.1. Der erweiterte Kalmanfilter	256
8.2. Anwendungsbeispiele	259
8.2.1. Simultane Gleichungssysteme mit zeitabhängigen Koeffizienten der gemeinsam endogenen Variablen	259
8.2.2. Gemeinsame Schätzung von Systemzuständen und der unbekanntenelemente einer Transitionsmatrix	262
<u>Teil III:</u> Maximum-Likelihood-Schätzung der konstanten Parameter eines dynamischen linearen Modells: Implementierung alternativer Maximum-Likelihood-Suchverfahren (EM- und SCORING-Methode), asymptotische Verteilungstheorie und Modellüberprüfung	264
1. Vorbemerkungen (Modellspezifikation und Notationen)	265
1.1. Spezifikation des zu schätzenden Modells	265
1.2. Der Maximum-Likelihood-Ansatz für die Schätzung der unbekanntenelemente (konstanten) Modellparameter: Besonderheiten der Likelihood-Gleichungen und ein Verfahrensüberblick für ihre Lösung	271

	Seite
2. Hilfsmittel zur Maximierung der Likelihood-Funktion	277
2.1. Einige Hilfssätze aus der Matrixalgebra	277
2.1.1. Vektorisierungsregeln	277
2.1.2. Differentiationsregeln für Matrizen und Vektoren	278
2.1.3. Dekompositionseigenschaften positiv (semi)definierter Matrizen	282
2.1.4. Verteilung quadratischer Formen in normalverteilten Zufallsvariablen	284
2.2. Das Scoring-Verfahren (C.R. Rao)	285
2.3. Das EM-Verfahren (Dempster/Laird/Rubin)	288
2.3.1. Definition des EM-Verfahrens	288
2.3.2. Zwei Hilfssätze: Die Informationsungleichung und einige Eigenschaften der Score-Funktion	291
2.3.3. Eigenschaften des EM-Algorithmus	293
3. Maximierung der log-Likelihood-Funktion in einem dynamischen linearen Modell	307
3.1. Implementierung der Scoring-Methode	307
3.1.1. Gradient und Hessesche Matrix der log-Likelihood	307
3.1.2. Optimierung der Schrittlänge und Berechnung der nächsten Iterationslösung	314
3.1.3. Vereinfachungen für einen Spezialfall	316
3.2. Implementierung der EM-Methode	317
3.2.1. Der Erwartungsschritt	317
3.2.2. Der Maximierungsschritt	322
3.3. Zusammenspiel der Scoring- und der EM-Methode im Rahmen einer gemeinsamen Zustands- und Parameterschätzung mit dem Kalmanfilter	328
4. Die Eindeutigkeit der Likelihood-Funktion in den unbekannten Modellparametern: "Identifizierbarkeit" der Parameter eines dynamischen linearen Modells	332
4.1. Identifizierbarkeit: Konzepte und Kriterien	332
4.2. Ein Beispiel für die Identifizierbarkeit zeitinvarianter Zustandsraummodelle: alternative Darstellung stationärer ARMA(X)-Modelle in Zustandsräumen	343

4.3.	Identifizierbarkeit in einem Spezialfall des dynamischen linearen Modells: Regressionsmodelle mit ARMA(X)-verteilten Regressionskoeffizienten	359
5.	Asymptotische Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Schätzer für die unbekannt (konstanten) Parameter eines dynamischen linearen Modells	379
5.1.	Asymptotische Eigenschaften von Maximum-Likelihood-Schätzern bei stochastisch abhängigen Beobachtungsvariablen: ein kurzer Überblick	379
5.2.	Asymptotische Normalität und Konsistenz der Maximum-Likelihood-Schätzer im dynamischen linearen Modell	395
6.	Modellüberprüfung	406
6.1.	Vorbemerkungen: Arten der Modellüberprüfung	406
6.2.	Überprüfung der Innovationsfolge auf (normalverteiltes) weißes Rauschen	411
6.3.	Überprüfen von Restriktionen auf dem Parameterraum	423
6.4.	Der Informationsmatrix-Test (H. WHITE)	434
7.	Schlußbemerkungen: Alternativen zur Maximum-Likelihood-Schätzung	436
<u>Teil IV:</u>	Anmerkungen und bibliographische Hinweise	440
<u>Teil V:</u>	Literaturverzeichnis	454-490
a)	Aufsätze in Zeitschriften, Aufsatzsammlungen, Konferenzbänden und Handbüchern; Arbeitspapiere	455
b)	Bücher (Monographien, Hand- und Lehrbücher)	483