

Erich J. Plate

# **Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure**



Verlag für Architektur  
und technische Wissenschaften  
Berlin

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> . . . . .	V
<b>1 Zufallsdaten und Zufallsprozesse</b> . . . . .	1
<b>1.1 Zufallsdaten</b> . . . . .	1
<b>1.2 Zufallsprozesse</b> . . . . .	3
<b>1.3 Zusammenfassung</b> . . . . .	4
<b>2 Beschreibende Statistik</b> . . . . .	6
<b>2.1 Überblick</b> . . . . .	6
2.1.1 Gliederung der Statistik . . . . .	6
2.1.2 Statistische Daten . . . . .	7
<b>2.2 Die Analyse eindimensionaler Stichproben</b> . . . . .	8
2.2.1 Der Mittelwert . . . . .	8
2.2.2 Genauigkeit und Empfindlichkeit eines Meßgerätes; mittlerer Fehler . . . . .	9
2.2.3 Standardabweichung und Varianz . . . . .	12
2.2.4 Verteilungsfunktion einer Stichprobe . . . . .	15
Kleine Stichproben . . . . .	15
Große Stichproben . . . . .	16
2.2.5 Definition der Momente einer Stichprobe . . . . .	20
2.2.6 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe . . . . .	20
<b>2.3 Die Analyse zweidimensionaler Stichproben</b> . . . . .	22
2.3.1 Die mittlere Beziehung zwischen Datenpaaren: Regressionen . . . . .	23
Ermittlung von $g(x)$ aus Laborversuchen . . . . .	24
Bestimmung von $g(x)$ für große Stichproben . . . . .	25
2.3.2 Lineare Regression . . . . .	26
Bestimmung der Parameter der Regressionsgeraden . . . . .	27
Die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten . . . . .	31
Nichtlineare Regression . . . . .	33
Mehrfache Regression . . . . .	34
2.3.3 Häufigkeitsverteilungen und Momente von zweidimensionalen Daten . . . . .	35
<b>2.4 Zusammenfassung</b> . . . . .	36
<b>3 Wahrscheinlichkeitskonzepte und das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten</b> . . . . .	38
<b>3.1 Begriff des Ereignisses</b> . . . . .	38
<b>3.2 Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsdefinitionen</b> . . . . .	42
3.2.1 Definition der Wahrscheinlichkeit als Grenzprozeß von relativen Häufigkeiten . . . . .	42
3.2.2 Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .	44
3.2.3 Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .	44

<b>3.3</b>	<b>Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten</b>	45
3.3.1	Disjunkte Ereignisse	47
3.3.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	47
3.3.3	Das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit	50
3.3.4	Das Theorem von Bayes	51
<b>3.4</b>	<b>Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Versagensereignisse</b>	52
3.4.1	Der Begriff des Versagens	52
3.4.2	Versagens- und Ereignisbäume	53
	Versagensbaum	53
	Ereignisbaum	55
3.4.3	Versagenswahrscheinlichkeit für Ursachenketten	56
	Der logische UND-Schalter	57
	Der logische ODER-Schalter	58
<b>3.5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	60
<b>4</b>	<b>Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	62
<b>4.1</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	62
4.1.1	Definition einer Zufallsvariablen	62
4.1.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsvariablen	65
<b>4.2</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diskrete Zufallsvariablen</b>	66
4.2.1	Definition der Wahrscheinlichkeitsfunktion	66
4.2.2	Momente und Erwartungswerte für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	67
4.2.3	Zusammenfassung der Formeln für diskrete Verteilungen	71
<b>4.3</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen für stetige Zufallsvariablen</b>	71
4.3.1	Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilung	71
4.3.2	Momente und Erwartungswerte	73
	Momente stetiger Verteilungen	73
	Symmetrische und antisymmetrische Funktionen	74
	Erwartungswert stetiger Funktionen	78
4.3.3	Erwartungswert für Dauerfestigkeiten	79
	Die Wöhlerkurve als Transformationsgleichung	80
	Die Grundgleichung der Schadensakkumulation	81
	Die Palmgren-Miner-Regel der Schadensakkumulation	82
4.3.4	Charakteristische Funktion	84
	Definition der charakteristischen Funktion	84
	Zusammenhang zwischen Momenten und charakteristischer Funktion	85
	Kumulanten einer Verteilungsfunktion	87
4.3.5	Zusammenfassung der Formeln für stetige Verteilungen	88
<b>4.4</b>	<b>Funktionen von einer Zufallsvariablen</b>	88
4.4.1	Definitionen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen	88

4.4.2	Eindeutige Transformationen: Wahrscheinlichkeitsdichten . . . . .	90
	Eindeutige Transformationen: Momente . . . . .	92
	Berechnung der Wahrscheinlichkeitstransformation über die charakteristische Funktion. . . . .	93
4.4.3	Wahrscheinlichkeitstransformation bei nicht umkehrbaren Funktionen $g(x)$ . . .	95
4.5	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diskrete Zufallsvariablen</b> . . . . .	99
<b>5.1</b>	<b>Einige Regeln zur Kombinatorik</b> . . . . .	99
5.1.1	Die Fakultät . . . . .	99
5.1.2	Permutationen . . . . .	100
5.1.3	Kombinatorik . . . . .	100
<b>5.2</b>	<b>Verteilungen von diskreten Daten</b> . . . . .	104
5.2.1	Die Bernoulliverteilung . . . . .	105
	Die Bernoulliverteilung . . . . .	105
	Momente der Bernoulliverteilung . . . . .	105
	Anwendung der Bernoulliverteilung . . . . .	106
5.2.2	Die Binomialverteilung . . . . .	106
	Die Binomialverteilung . . . . .	106
	Momente der Binomialverteilung . . . . .	110
	Anwendung der Binomialverteilung . . . . .	111
	Redundanz als Bemessungsprinzip . . . . .	113
	Das Theorem von Moivre-Laplace . . . . .	116
5.2.3	Die Poissonverteilung . . . . .	116
	Die Poissonverteilung . . . . .	116
	Charakteristische Funktion und Momente der Poissonverteilung . . . . .	118
	Anwendung der Poissonverteilung . . . . .	119
5.2.4	Von der Binomialverteilung abgeleitete Verteilungen . . . . .	119
	Die geometrische Verteilung . . . . .	119
	Die hypergeometrische Verteilung . . . . .	121
	Die Multinomialverteilung . . . . .	123
<b>5.3</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen für stetige Zufallsvariablen</b> . . . . .	125
<b>6.1</b>	<b>Die Familie der Betaverteilungen</b> . . . . .	127
6.1.1	Die Betaverteilung (Pearson Typ I, B-Verteilung) . . . . .	127
6.1.2	Die standardisierte Betaverteilung (BN-Verteilung) . . . . .	127
	Momente der standardisierten Betaverteilung . . . . .	128
	Anwendung der standardisierten Betaverteilung . . . . .	129
6.1.3	Die Gleichverteilung (U-Verteilung) . . . . .	131
	Anwendung der Gleichverteilung . . . . .	132

<b>6.2</b>	<b>Die Familie der Normalverteilungen</b>	132
6.2.1	Die Normalverteilung (N-Verteilung)	132
6.2.2	Momente und charakteristische Funktion der Normalverteilung	134
6.2.3	Die standardisierte Grundform der Normalverteilung	134
	Anwendung der standardisierten Normalverteilung	135
	Quantilen der Normalverteilung	135
6.2.4	Die log-normale Wahrscheinlichkeitsverteilung (LN-Verteilung)	136
	Anwendung der zweiparametrischen log-Normalverteilung	137
	Anwendung der dreiparametrischen log-Normalverteilung	139
6.2.5	Die $\chi^2$ -Verteilung für einen Freiheitsgrad	140
<b>6.3</b>	<b>Die Familie der Gammaverteilungen</b>	141
6.3.1	Die Gammaverteilung (P-Verteilung)	141
6.3.2	Die dreiparametrische Gammaverteilung (P3-Verteilung)	142
	Momente und Parameter der Gammaverteilung	143
	Die standardisierte Grundform der Gammaverteilung	144
	Anwendung der Gammaverteilung	145
6.3.3	Die zweiparametrische Gammaverteilung (P2-Verteilung)	145
6.3.4	Die $\chi^2$ -Verteilung	146
6.3.5	Die Exponentialverteilung	146
6.3.6	Die logarithmische Gammaverteilung (LP3-Verteilung)	147
6.3.7	Die verallgemeinerte Gammaverteilung (GG-Verteilung)	149
6.3.8	Die Weibullverteilung (W-Verteilung)	150
	Die standardisierte Weibullverteilung (W2-Verteilung)	151
	Die dreiparametrische Weibullverteilung (W3-Verteilung)	152
<b>6.4</b>	<b>Die Familie der Extremalverteilungen</b>	153
6.4.1	Die Gumbelschen Klassen der Extremalverteilung	153
6.4.2	Die Doppelexponential- oder Gumbelverteilung (G-Verteilung)	154
<b>6.5</b>	<b>Rangstatistik</b>	157
6.5.1	Verteilung des k-größten Wertes aus einer Stichprobe von n-Werten	157
	Verteilung der Extremwerte	160
	Verteilung des Medianwertes	161
<b>6.6</b>	<b>Zufallszahlengenerierung</b>	163
6.6.1	Prinzip der Zufallszahlengenerierung	163
6.6.2	Die Paretoverteilung	166
6.6.3	Die Wakebyverteilungen	167
<b>6.7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	170
<b>7</b>	<b>Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Einführung</b>	172
<b>7.1</b>	<b>Definitionen und Begriffe</b>	172
7.1.1	Die mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte	173
	Stetige zweidimensionale Dichtefunktionen	173

Die Randwahrscheinlichkeitsdichte . . . . .	175
7.1.2 Die mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . .	176
7.1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	177
Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten . . . . .	178
Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen . . . . .	180
7.1.4 Auftreten von Ereignissen in zufälligen Abständen . . . . .	181
7.1.5 Mehrdimensionale bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten . . . . .	184
Auswirkung der Parameterunsicherheit auf die Wahrscheinlichkeitsdichte . . . . .	184
7.1.6 Die Formel von Bayes für Wahrscheinlichkeitsdichten . . . . .	186
Bayes Schätzung mit diffuser (nicht-informativer) Priorverteilung . . . . .	187
Bayes Schätzung mit bekannter (informativer) Priorverteilung . . . . .	189
<b>7.2 Momente und Erwartungswerte mehrdimensionaler Zufallsvariablen . . . . .</b>	<b>191</b>
7.2.1 Momente mehrdimensionaler Zufallsvariablen . . . . .	191
Momente zweidimensionaler Zufallsvariablen . . . . .	191
Erwartungswerte und charakteristische Funktion für zwei Zufallsvariablen . . . . .	194
<b>7.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen für eine Funktion von mehreren Zufallsvariablen . . . . .</b>	<b>195</b>
7.3.1 Wahrscheinlichkeitsdichte einer Funktion von zwei Zufallsvariablen . . . . .	195
Die Wahrscheinlichkeitsdichte bei korrelierten Variablen . . . . .	195
Die Wahrscheinlichkeitsdichte bei stochastisch unabhängigen Variablen . . . . .	197
<b>7.4 Mehrdimensionale Transformationsgleichungen für Zufallsvariable . . . . .</b>	<b>202</b>
7.4.1 Transformation für zwei Zufallsvariable . . . . .	202
Fall 1: Wahrscheinlichkeitsdichte zweier standardisierter Zufallsvariabler . . . . .	204
Fall 2: Transformation in Polarkoordination . . . . .	205
Fall 3: Rotation und Translation der Merkmalsebene . . . . .	210
Fall 4: Transformation korrelierter Zufallsvariablen in unkorrelierte Variablen . . . . .	211
7.4.2 Transformationen mehrerer Zufallsvariablen . . . . .	213
<b>7.5 Zusammenfassung . . . . .</b>	<b>215</b>
<b>8 Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Reihen eindimensionaler Funktionen von Zufallsvariablen . . . . .</b>	<b>216</b>
<b>8.1 Erwartungswerte und Momente für Zufallsreihen . . . . .</b>	<b>216</b>
8.1.1 Erwartungswerte für Summen von Zufallsvariablen . . . . .	216
8.1.2 Erwartungswerte für Summen von gleichen Zufallsvariablen . . . . .	219
8.1.3 Erwartungswerte für lineare Funktionen von Zufallsvariablen . . . . .	220
Sonderfall: Erwartungswerte für linearisierte Funktionen $g(x)$ . . . . .	222
Verallgemeinerte Erwartungswerte für linearisierte Funktionen . . . . .	225
<b>8.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Reihen eindimensionaler Funktionen von Zufallsvariablen . . . . .</b>	<b>226</b>
8.2.1 Summen von zwei Funktionen von Zufallsvariablen . . . . .	226
Fall 1: $z = x - y$ . . . . .	227
Fall 2: $z = x + y$ . . . . .	228

8.2.2	Anwendung der charakteristischen Funktion auf Summen eindimensionaler Funktionen von Zufallsvariablen . . . . .	234
	Anwendung auf die Funktion $z = x + y$ . . . . .	234
	Summe von $m$ stochastisch unabhängigen Variablen . . . . .	238
8.2.3	Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .	240
<b>8.3</b>	<b>Reihen von <math>m</math> gleichen Funktionen von normalverteilten Zufallsvariablen:</b>	
	<b>Testverteilungen</b> . . . . .	242
8.3.1	Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Fall $s = 1$ . . . . .	243
8.3.2	Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Fall $s = 2$ . . . . .	244
	Fall 1: Die Wahrscheinlichkeitsdichte der $\chi$ -Verteilung . . . . .	244
	Fall 2: Die Wahrscheinlichkeitsdichte der $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	246
<b>8.4</b>	<b>Weitere Testverteilungen</b> . . . . .	247
8.4.1	Die Wahrscheinlichkeitsdichte der t-Verteilung . . . . .	247
8.4.2	Die Wahrscheinlichkeitsdichte der F-Verteilung . . . . .	248
<b>8.5</b>	<b>Summe von allgemeinen eindimensionalen Funktionen von Zufallsvariablen</b> . . . . .	249
8.5.1	Wahrscheinlichkeitsdichte bei stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen . . . . .	249
	Exakte Lösung für zwei Zufallsvariablen . . . . .	249
	Näherungslösung bei linearisierten Funktionen von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen . . . . .	251
<b>8.6</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	251
<b>9</b>	<b>Bewertende Statistik</b> . . . . .	252
<b>9.1</b>	<b>Punktschätzung der statistischen Parameter aus Elementen einer eindimensionalen Stichprobe</b> . . . . .	253
9.1.1	Die Tschebycheffsche Ungleichung . . . . .	255
9.1.2	Kriterien für die Bestimmung der Schätzfunktion $g(\dots)$ . . . . .	256
	Erwartungstreue Schätzung . . . . .	257
	Wirksame Schätzung . . . . .	261
	Konsistente Schätzung . . . . .	264
	Ausreichende Schätzung . . . . .	265
	Robuste Schätzung . . . . .	265
9.1.3	Die Punktschätzung nach dem Momentenverfahren . . . . .	266
9.1.4	Die Punktschätzung nach der Maximum Likelihood Methode . . . . .	268
<b>9.2</b>	<b>Die Güte der Parameterschätzung aus Stichproben</b> . . . . .	270
9.2.1	Konfidenzzahlen und Konfidenzgrenzen . . . . .	271
9.2.2	Schätzung der Parametergüte mit Konfidenzzahlen . . . . .	273
9.2.3	Parameterschätzung für normalverteilte Gesamtheiten . . . . .	274
	Konfidenzbereich für $\mu_x$ bei unbekanntem $\mu_x$ und bekanntem $\sigma_x^2$ . . . . .	274
	Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekanntem Mittelwert $\mu_x$ und unbekannter Varianz $\sigma_x^2$ . . . . .	277
	Konfidenzbereich für $\sigma_x^2$ bei bekanntem $\mu_x$ und bekanntem $\sigma_x^2$ . . . . .	279 $\phi$
9.2.4	Die Güteschätzung für die Fraktile . . . . .	283

<b>9.3</b>	<b>Testen von Hypothesen</b> . . . . .	287
9.3.1	Hypothesentests und Schätzfehler . . . . .	288
9.3.2	Testen der Nullhypothese bei Mittelwerten . . . . .	291
	Fall 1: Gesamtheitsmittel und Gesamtheitsvarianz bekannt . . . . .	291
	Fall 2: Gesamtheitsmittel bekannt, aber die Standardabweichung der Verteilung der Gesamtheit ist nicht bekannt . . . . .	293
	Fall 3: Vergleich zweier Mittelwerte . . . . .	294
9.3.3	Testen der Varianzen zweier Variabler . . . . .	295
	Fall 1: Vergleichsvarianz exakt bekannt . . . . .	296
	Fall 2: Vergleichsvarianz muß geschätzt werden . . . . .	297
<b>9.4</b>	<b>Schätzung der Güte der Anpassung an die Form der Normalverteilung</b> . . . . .	299
9.4.1	Der Chi-Quadrat-Test . . . . .	299
9.4.2	Graphische Schätzung der Form und der Parameter von normalverteilten Daten . . . . .	304
9.4.3	Der Kolmogoroff-Smirnow-Test . . . . .	307
<b>9.5</b>	<b>Parameterschätzungen bei Regressionen</b> . . . . .	309
9.5.1	Allgemeine nichtlineare Regression . . . . .	310
9.5.2	Regression mit normalverteiltem Zufallsanteil . . . . .	313
	Fall 1: Lineare Regression . . . . .	314
	Fall 2: Logarithmisch lineare Regression . . . . .	314
	Fall 3: Die allgemeine nichtlineare Regression . . . . .	315
9.5.3	Parameterschätzung für lineare Regressionen nach der Maximum Likelihood Methode . . . . .	315
	Mittelwerte und Varianzen der Koeffizienten $a_x$ und $b_x$ . . . . .	317
	Konfidenzgrenzen für die Koeffizienten linearer Regressionen . . . . .	319
	Lineare Regression logarithmierter Daten . . . . .	321
9.5.4	Das Testen von Korrelationskoeffizienten . . . . .	326
	Signifikanztest für Korrelationskoeffizienten . . . . .	326
	Vertrauensgrenzen für Korrelationskoeffizienten . . . . .	327
<b>9.6</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	328
<b>10</b>	<b>Schätzungen von Parametern und ihren Verteilungen nach der Bayes Methode</b> . . . . .	329
<b>10.1</b>	<b>Das Prinzip der Parameterschätzung mit der Bayes Methode</b> . . . . .	330
<b>10.2</b>	<b>Bayes Schätzung für normalverteilte Gesamtheiten</b> . . . . .	332
10.2.1	Likelihoodfunktion und Priorverteilungen . . . . .	332
	Fall 1: Die diffuse Priorverteilung . . . . .	333
	Fall 2: Konjugierte Priorverteilungen . . . . .	333
10.2.2	Normalverteilte Gesamtheit: Schätzung des Mittelwertes aus einer Stichprobe bei bekannter Gesamtheits-Varianz $\sigma_x^2$ . . . . .	334
	Fall 1: Mittelwertschätzung mit diffuser Vorinformation . . . . .	334
	Fall 2: Mittelwertschätzung unter Verwendung von Priorinformation . . . . .	336
10.2.3	Bayes Schätzung für die unbekannt Parameter $\mu_x$ und $\sigma_x^2$ einer normalverteilten Grundgesamtheit . . . . .	339



Fall 1: Diffuse Priorverteilung . . . . .	340
Fall 2: Konjugierte Priorverteilung . . . . .	343
<b>10.3 Bayesschtzung für den Mittelwert von nicht normalverteilten Gesamtheiten . . . . .</b>	<b>350</b>
10.3.1 Binomialverteilte Grundgesamtheiten . . . . .	350
Fall 1: Diffuse Priorverteilung . . . . .	351
Fall 2: Konjugierte Priorverteilung . . . . .	353
10.3.2 Exponentialverteilte Gesamtheiten . . . . .	354
Fall 1: Diffuse Priorverteilung . . . . .	355
Fall 2: Natürlich konjugierte Priorverteilung . . . . .	356
<b>10.4 Zusammenfassung . . . . .</b>	<b>358</b>
<b>11 Anpassung von Extremwertverteilungsfunktionen an Stichproben . . . . .</b>	<b>360</b>
<b>11.1 Parameter und Form der log-Normalverteilung . . . . .</b>	<b>362</b>
11.1.1 Parameterschtzung für die log-Normalverteilung . . . . .	363
11.1.2 Berechnung der Fraktile der log-Normalverteilung . . . . .	370
11.1.3 Güte der Datenanpassung an die log-Normalverteilung . . . . .	373
Graphische Datenanpassung an die log-Normalverteilung . . . . .	373
Das Kolmogoroff-Smirnow Verfahren für die log-Normalverteilung . . . . .	374
<b>11.2 Parameter und Form der Pearson Typ III Verteilung . . . . .</b>	<b>378</b>
11.2.1 Parameterschtzung für die Pearson Typ III Verteilung . . . . .	378
Parameterschtzung für die P3-Funktion . . . . .	378
11.2.2 Schätzung der Fraktile $x_T$ der zwei und dreiparametrischen Gammaverteilung (Pearson-Verteilung) . . . . .	381
; Schätzung der Fraktile . . . . .	381
Ermittlung des Streubereichs für die Fraktile der P3-Verteilung . . . . .	382
11.2.3 Parameterschtzung für die log Pearson Typ III Verteilung . . . . .	384
11.2.4 Schätzung der Form der zwei und dreiparametrischen Gammaverteilung . . . . .	388
Kolmogoroff-Smirnow-Test . . . . .	389
Graphische Darstellung der Gammaverteilung . . . . .	390
11.2.5 Graphische Anpassung der Exponentialverteilung . . . . .	396
<b>11.3 Parameter und Form der Weibullverteilung . . . . .</b>	<b>399</b>
11.3.1 Parameterschtzung für die zweiparametrische Weibullverteilung $W_2$ . . . . .	399
11.3.2 Parameterschtzung für die dreiparametrische Weibullverteilung $W_3$ . . . . .	401
11.3.3 Die Fraktile und ihr Streubereich für die Weibullverteilung . . . . .	404
Bestimmung der T-Fraktile . . . . .	404
Streubereich für die Fraktile $x_T$ . . . . .	405
11.3.4 Überprüfung der Güte der Anpassung an die Weibullverteilung . . . . .	406
Graphische Darstellung der Weibullverteilung . . . . .	406
<b>11.4 Parameter und Form der Gumbel Extremalverteilung . . . . .</b>	<b>409</b>
11.4.1 Parameterschtzung für die Gumbelverteilung . . . . .	410
Methode der Regression . . . . .	410
Methode der Momente . . . . .	416

11.4.2	Schätzwerte für die $x_T$ Fraktile und ihren Streubereich . . . . .	417
	Ermittlung der Fraktile $x_T$ . . . . .	417
	Ermittlung von Konfidenzgrenzen für Fraktile . . . . .	417
11.4.3	Güte der Anpassung der Gumbelverteilung an experimentelle Daten . . . . .	420
	Anpassungstest nach Kolmogoroff-Smirnow für Gumbelverteilungen . . . . .	420
	Graphische Darstellung der Gumbelverteilung . . . . .	420
<b>11.5</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>423</b>
<b>12</b>	<b>Stochastische Bemessung</b> . . . . .	<b>424</b>
<b>12.1</b>	<b>Definitionen und Begriffe</b> . . . . .	<b>424</b>
12.1.1	Systeme und ihre Komponenten . . . . .	425
12.1.2	Belastungen, Belastbarkeit und Versagen . . . . .	426
12.1.3	Definition der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	428
<b>12.2</b>	<b>Stochastische Bemessungskonzepte für Bauwerke</b> . . . . .	<b>431</b>
12.2.1	Bemessungsstufe 1 . . . . .	432
12.2.2	Stochastische Bemessung nach Bemessungsstufen 2 und 3 . . . . .	435
	Direkte Lösung . . . . .	437
	Bemessung durch Simulation . . . . .	438
	Zusammenhang zwischen Bemessungsstufe 1 und Bemessungsstufen 2 und 3 . . . . .	439
12.2.3	Vollständiges Bemessungskonzept nach Bemessungsstufe 4 . . . . .	440
<b>12.3</b>	<b>Die Methode der zweiten Momente</b> . . . . .	<b>444</b>
12.3.1	Der Sicherheitsindex . . . . .	444
	Sicherheitsindex bei normalverteilten Variablen . . . . .	444
	Sicherheitsindex bei log-normalverteilten Variablen . . . . .	448
	Bemessung mit vorgegebener Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	450
12.3.2	Die Methode der zweiten Momente in reduzierten Variablen . . . . .	451
12.3.3	Verallgemeinerung der Methode der zweiten Momente für stochastisch unabhängige Basisvariablen . . . . .	454
	Fall 1: Lineare Wirkungsfunktion . . . . .	458
	Fall 2: Um Mittelwert-linearisierte Wirkungsfunktion . . . . .	463
	Fall 3: Linearisierung der Wirkungsfunktion um den wahrscheinlichsten Versagenspunkt . . . . .	470
12.3.4	Weiterentwicklungen der Methode der zweiten Momente . . . . .	476
12.3.5	Sicherheitsbeiwerte bei stochastischer Bemessung . . . . .	477
	Der globale Sicherheitsfaktor . . . . .	477
	Teilsicherheitsbeiwerte . . . . .	479
<b>12.4</b>	<b>Versagenswahrscheinlichkeit bei Bemessungsstufe 3</b> . . . . .	<b>480</b>
12.4.1	Direkte Berechnung des Freudenthal Integrals . . . . .	481
12.4.2	Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit über die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{r,s}(r s)$ . . . . .	483
<b>12.5</b>	<b>Zuverlässigkeit als Bemessungskriterium für Bauwerke</b> . . . . .	<b>485</b>

12.5.1	Zusammenhang zwischen Versagenswahrscheinlichkeit $P_V$ und Zuverlässigkeit RE . . . . .	486
	Fall 1: Konstante Hasardfunktion . . . . .	487
	Fall 2: Ansteigende Hasardfunktion . . . . .	489
	Fall 3: Systemhasardfunktion . . . . .	490
12.5.2	Erweiterung des Versagensbegriffs auf Betriebsversagen . . . . .	490
<b>12.6</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>494</b>
<b>13</b>	<b>Stochastische Prozesse: Grundlagen</b> . . . . .	<b>496</b>
<b>13.1</b>	<b>Definitionen und Grundbegriffe für stochastische Prozesse</b> . . . . .	<b>496</b>
13.1.1	Grundbegriffe . . . . .	496
13.1.2	Anwendungen für stochastische Prozesse . . . . .	498
	Das Simulationsproblem . . . . .	498
	Das Monte Carlo Problem . . . . .	498
	Das Vorhersageproblem . . . . .	498
	Das Problem der Varianzanalyse . . . . .	498
13.1.3	Erwartungswert, Schätzwerte und Stationarität . . . . .	499
<b>13.2</b>	<b>Die Struktur der Zeitreihen</b> . . . . .	<b>502</b>
13.2.1	Der Trend . . . . .	503
13.2.2	Die periodische Funktion . . . . .	504
13.2.3	Der Zufallsanteil . . . . .	507
<b>13.3</b>	<b>Zeitreihenanalyse: Der Trend</b> . . . . .	<b>508</b>
13.3.1	Bestimmung des Trends durch Differenzieren . . . . .	508
13.3.2	Entfernung eines linearen Trends durch gleitendes Mittel . . . . .	510
13.3.3	Trendbestimmung mit der Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	511
13.3.4	Sprunganalyse . . . . .	515
<b>13.4</b>	<b>Zeitreihenanalyse: Die periodische Komponente</b> . . . . .	<b>517</b>
13.4.1	Bestimmung des periodischen Anteils bei bekannter Periode . . . . .	518
	Ermittlung der Fourierkoeffizienten . . . . .	518
	Bestimmung der periodischen Funktion $x_p(t)$ durch Mittelbildung . . . . .	518
13.4.2	Beste Schätzung der Parameter einer periodischen Funktion . . . . .	523
13.4.3	Beispiel einer Zeitreihenanalyse für Trend und periodische Komponenten . . . . .	526
<b>13.5</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>531</b>
<b>14</b>	<b>Kovarianzfunktionen und Spektren</b> . . . . .	<b>533</b>
<b>14.1</b>	<b>Korrelationsfunktionen und Kovarianzen</b> . . . . .	<b>533</b>
14.1.1	Eigenschaften der Autokovarianzfunktion . . . . .	534
14.1.2	Die Struktur der Autokovarianz eines stochastischen Prozesses . . . . .	540
	Das Integralmaß der Autokovarianzfunktion . . . . .	540
	Das Mikrozeitmaß . . . . .	540

	Die mittlere Periode $P_c$ der Nulldurchgänge bei normalverteilten Zeitfunktionen	541
14.1.3	Die Eigenschaften von Kreuzkovarianzfunktionen	544
<b>14.2</b>	<b>Kovarianzen von Summen zweier Zeitfunktionen</b>	545
14.2.1	Autokovarianzen für die Summe von zwei Zeitfunktionen	546
	Die Autokovarianzfunktion für $z(t) = x_p(t) + x_r(t)$	546
	Bestimmung des periodischen Anteils bei unbekannter Periode	547
	Das Variogramm in der Geostatistik	550
14.2.2	Kreuzkovarianzen von Überlagerungen	552
	Parameterbestimmung durch Kreuzkovarianz	552
	Reduktion von Rauschen in Meßgrößen über Kreuzkovarianzen	553
<b>14.3</b>	<b>Zufällige Zeitfunktionen im Frequenzbereich</b>	556
14.3.1	Fourierintegral und Fouriertransformation	556
14.3.2	Theoreme für Fouriertransformationen	557
14.3.3	Momentenberechnung aus Fouriertransformationen	560
<b>14.4</b>	<b>Das Energiespektrum und seine Eigenschaften</b>	560
14.4.1	Das Spektrum einer periodischen Funktion	561
14.4.2	Eigenschaften des Spektrums für stationäre Zufallsprozesse	562
14.4.3	Mikrozeitmaß und Makrozeitmaß im Frequenzbereich	566
14.4.4	Mittlere Frequenz und spektrale Schärfe	567
14.4.5	Bandbegrenztetes Rauschen und andere Beispiele	568
	Bandbegrenztetes „weißes“ Rauschen	568
	Das Markoff-Spektrum	571
	Modifiziertes Markoff-Spektrum	573
14.4.6	Spektren von Wind und Wellenbelastungen	574
14.4.7	Kreuzspektrum und Kohärenz	576
	Kohärenz bei Überlagerung von Signal und Rauschen	577
<b>14.5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	579
<b>15</b>	<b>Parameterschätzung für Zeitreihen</b>	580
<b>15.1</b>	<b>Mittelwertfehler von Zeitreihen</b>	580
15.1.1	Mittelwertfehler im Zeitbereich	581
15.1.2	Mittelwertfehler im Frequenzbereich	584
15.1.3	Mittelwertfehler bei weißem Rauschen und Ersatzbandbreite	586
<b>15.2</b>	<b>Schätzungen von Kovarianzen und Spektren</b>	587
15.2.1	Meßdauerfehler von Kreuz- und Autokovarianzen	587
	Anwendung auf bandbegrenztetes weißes Rauschen	592
<b>15.3</b>	<b>Schätzung der Spektraldichten</b>	593
15.3.1	Schätzverfahren zur Ermittlung der Spektraldichten	594
	Analogberechnung des Spektrums	595
	Schätzung der Spektraldichte bei der digitalen Datenverarbeitung	596
15.3.2	Schätzung der Ersatzbandbreite	596
	Stichprobentheorem im Frequenzbereich	596

Stichprobentheorem im Zeitbereich . . . . .	597
Ersatzbandbreite einer Zufallsfunktion . . . . .	598
Bestimmung des Freiheitsgrades der Spektraldichtenschätzung . . . . .	601
Der $\chi^2$ -Test für die Schätzung der Spektraldichten . . . . .	602
Festlegung der Diskretisierungsrate einer Zeitreihe . . . . .	602
15.3.3 Der „Alias“-Fehler . . . . .	603
15.3.4 Planung der Messung eines Spektrums . . . . .	604
<b>15.4 Zusammenfassung . . . . .</b>	<b>608</b>
<b>16 Lineare stochastische Prozesse . . . . .</b>	<b>609</b>
<b>16.1 Strukturanalyse und Anwendung stochastischer Prozesse . . . . .</b>	<b>609</b>
16.1.1 Vorhersage mit stochastischen Prozessen . . . . .	609
16.1.2 Strukturanalyse stochastischer Prozesse . . . . .	610
<b>16.2 Diskrete stationäre Prozesse . . . . .</b>	<b>611</b>
16.2.1 Autoregressive Prozesse . . . . .	612
Der AR(1)-Prozeß . . . . .	612
Parameter des AR(k)-Prozesses . . . . .	615
16.2.2 Prozesse über das gleitende Mittel . . . . .	620
16.2.3 Box-Jenkins- und andere Modelle . . . . .	622
16.2.4 Normale Prozesse . . . . .	623
<b>16.3 Stetige stochastische Prozesse . . . . .</b>	<b>624</b>
16.3.1 Lineare Systeme und ihre Darstellung . . . . .	624
16.3.2 Lineare Systeme als Mittel zur Generierung von Normalprozessen . . . . .	627
16.3.3 Anwendung der Fouriertransformation auf lineare Systeme . . . . .	628
Fouriertransformation einer Konvolution . . . . .	628
Momente bei linearen Systemen . . . . .	632
Parameterermittlung linearer Systeme über die Momentenmethode . . . . .	633
16.3.4 Spektrum linearer Systeme . . . . .	637
16.3.5 Ermittlung der Ausgangsvarianz: Beispiel Fluktuierende Windlasten . . . . .	639
<b>16.4 Poisson-Prozesse . . . . .</b>	<b>642</b>
16.4.1 Entstehung eines Poisson-Prozesses . . . . .	642
16.4.2 Die Verteilungsfunktion der Zeiten $\tau_k$ eines Poisson-Prozesses . . . . .	646
16.4.3 Poisson-Prozeß mit Extremwerten . . . . .	648
16.4.4 Poisson-Prozeß mit zeitlich periodisch variablem Mittelwert . . . . .	650
<b>16.5 Zusammenfassung . . . . .</b>	<b>654</b>
<b>Anhang A . . . . .</b>	<b>655</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>670</b>
<b>Stichwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>678</b>