

# Fortschritt-Berichte VDI

Reihe 4

Bauingenieurwesen

Daniel Jun,  
Wetter

Nr. 187

## Adaptive Strategien für nichtlineare Finite- Element-Simulationen von Schalentragwerken



*HLuHB Darmstadt*



15463589

Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Ruhr-Universität Bochum

# Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IX
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Stand der Forschung	1
1.2 Zielsetzung	3
1.3 Gliederung der Arbeit	3
<b>2 Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Kinematik	5
2.1.1 Lage und Deformation	6
2.1.2 Basisvektoren und Metriktensor	7
2.1.3 Deformationsgradient	8
2.1.4 Verzerrungen	10
2.2 Spannungen	11
2.2.1 CAUCHY'scher Spannungstensor	12
2.2.2 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor	13
2.3 Materialgesetze	14
2.3.1 Hyperelastisches ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materialmodell	14
2.4 Bilanz- und Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik	16
2.4.1 Energieerhaltungssatz	16
2.4.2 Satz von der Erhaltung der Masse	17
2.4.3 Satz von der Erhaltung des Impulses	18
2.4.4 Satz von der Erhaltung des Drehimpulses	19
2.5 Arbeits- und Energieprinzipien	19
2.5.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen	20

2.5.2	Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials . . . . .	21
2.5.3	Prinzip von HU-WASHIZU . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Kontinuumsbasierte Schalentheorie</b>	<b>24</b>
3.1	Klassische Mittelflächen-Schalentheorien . . . . .	24
3.2	Ansatz für die Schalenkinematik . . . . .	26
3.3	Kinematik des Schalenkontinuums . . . . .	27
3.4	Kinematische und statische Variablen des Schalenkontinuums . . . . .	29
3.4.1	Kinematische Variablen . . . . .	29
3.4.2	Statische Variablen . . . . .	31
3.4.3	Klassifizierung und Interpretation der Schalenvariablen . . . . .	32
3.5	Mehrschichten-Schalenkinematik . . . . .	34
3.5.1	Interne Mehrschichten-Schalenkinematik . . . . .	34
3.5.2	Externe Mehrschichten-Schalenkinematik . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Finite-Element-Diskretisierung</b>	<b>40</b>
4.1	Linearisierung . . . . .	40
4.2	Isoparametrische Elementformulierung . . . . .	42
4.3	Lösung des nichtlinearen Randwertproblems . . . . .	43
4.4	Künstliche Versteifungseffekte – Locking . . . . .	44
4.4.1	POISSON-Locking . . . . .	45
4.4.2	Membran-Locking . . . . .	46
4.4.3	Volumen-Locking . . . . .	48
4.4.4	Scher-Locking . . . . .	48
4.4.5	Krümmungs-Locking . . . . .	49
4.5	Assumed-Strain-Konzepte . . . . .	50
4.5.1	Enhanced Assumed Strain Methode . . . . .	51
4.5.2	Assumed Natural Strain Methode . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Fehlerabschätzung und Adaptivität</b>	<b>61</b>
5.1	Vorbemerkungen . . . . .	61
5.2	Fehlerquellen bei der Anwendung der Methode der finiten Elemente . . . . .	62
5.3	Fehlerschätzer . . . . .	63

5.3.1	Fehlerdefinition . . . . .	64
5.3.2	Fehlernormen . . . . .	64
5.3.3	Relativer Fehler . . . . .	65
5.4	A-posteriori Fehlerschätzer für lineare Problemstellungen . . . . .	66
5.4.1	Residualer Fehlerschätzer . . . . .	66
5.4.2	Glättungsbasierter Fehlerschätzer . . . . .	68
5.5	A-posteriori Fehlerschätzer für nichtlineare Problemstellungen . . . . .	71
5.5.1	Inkrementeller Fehlerschätzer für geometrisch nichtlineare Problemstellungen . . . . .	72
5.5.2	Inkrementeller Fehlerschätzer für physikalisch nichtlineare Problemstellungen . . . . .	72
5.5.3	Transfer der Zustands- und Geschichtsvariablen . . . . .	73
5.6	Adaptive Simulationsstrategie . . . . .	74
5.6.1	Transformation von Schalenspannungen . . . . .	74
5.6.2	Adaptionskriterium . . . . .	75
5.7	Adaptive Strategien . . . . .	76
<b>6</b>	<b><i>h</i>-adaptive Simulationsstrategien mit finiten 3D-Schalenelementen</b> . . . . .	<b>79</b>
6.1	Simulationssystem FEMASORPHEUS . . . . .	79
6.1.1	Modulares Simulationskonzept . . . . .	80
6.1.2	Beispiel: L-Scheibe . . . . .	80
6.1.3	Interaktion zwischen Geometrie und Diskretisierung . . . . .	82
6.1.4	Hierarchische Netzverwaltung . . . . .	83
6.2	3-dimensionale, anisotrope <i>h</i> -Verfeinerung . . . . .	84
6.2.1	Verfeinerung mittels hängender Knoten . . . . .	85
6.2.2	Anisotrope Elementverfeinerung . . . . .	87
6.2.3	Übergang/Kopplung Volumenelement-Schalenelement . . . . .	88
6.3	<i>h</i> -Adaptivität in Dickenrichtung . . . . .	89
6.3.1	Motivation . . . . .	90
6.3.2	<i>h</i> -Verfeinerungsstrategien in Dickenrichtung . . . . .	92
6.3.3	Anwendungsgebiete und numerische Effizienz . . . . .	94

<b>7 Numerische Beispiele</b>	<b>96</b>
7.1 Vorbemerkungen . . . . .	96
7.2 Eindimensionales Balkenproblem – $h$ -Adaptivität in Balkenlängsrichtung . . . . .	97
7.2.1 Eingespannter Balken . . . . .	97
7.3 Klassische Schalenprobleme – $h$ -Adaptivität in Schalenebene . . . . .	99
7.3.1 COOK's Membran . . . . .	100
7.3.2 Ringplatte . . . . .	102
7.3.3 Halbkugel mit Loch . . . . .	104
7.4 Schalenprobleme mit POISSON-Locking – $h$ -Adaptivität in Schalendickenrichtung . . . . .	107
7.4.1 Schale mit geometrischer Diskontinuität . . . . .	108
7.4.2 Verdrillter Kragarm . . . . .	109
7.4.3 Platte unter Vollast . . . . .	114
<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>121</b>
8.1 Zusammenfassung . . . . .	121
8.2 Ausblick . . . . .	122
<b>A Tensorrechnung</b>	<b>124</b>
<b>B Herleitung der Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik</b>	<b>125</b>
B.1 Massenerhaltungssatz und Impulserhaltungssatz . . . . .	125
B.2 Drehimpulserhaltungssatz . . . . .	127
<b>C Variationsprinzip</b>	<b>128</b>
C.1 Variation des Prinzips der virtuellen Verschiebungen . . . . .	128
C.2 Variation des Prinzips von HU-WASHIZU . . . . .	129
<b>D Implementierung der SIMPSON-Regel</b>	<b>131</b>
<b>E Normen</b>	<b>134</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>135</b>