

# Schalentheorie

Von Prof. Dr. Ernest L. Axelrad, München

Mit 64 Bildern

Institut f. Massivbau  
der Techn. Hochschule Darmstadt

Inv.-Nr. 7729



B. G. Teubner Stuttgart 1983

# Inhalt

<b>1 Grundlagen der Theorie dünner Schalen</b> .....	<b>11</b>
1.1 Allgemeines .....	11
1.2 Schalengeometrie .....	13
1.2.1 Koordinaten .....	13
1.2.2 Krümmung einer Fläche .....	14
1.2.3 Kompatibilität der Flächenparameter .....	17
1.2.4 Rotationsfläche .....	18
1.2.5 Krümmungsparameter für verschiedene Koordinatensysteme .....	20
1.3 Verformung der Referenzfläche .....	22
1.3.1 Verformungsparameter .....	22
1.3.2 Kompatibilitätsgleichungen .....	24
1.3.3 Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen .....	27
1.4 Hypothese. Schalendeformation .....	29
1.4.1 Kirchhoffsche Hypothese .....	29
1.4.2 Verzerrungskomponenten .....	31
1.4.3 Bemerkungen über $\kappa_\xi, \kappa_\theta, \tau$ .....	32
1.5 Gleichgewicht eines Schalenelementes .....	33
1.5.1 Vektorgleichungen des Gleichgewichts .....	33
1.5.2 Skalare Gleichgewichtsbedingungen .....	35
1.6 Verformungsenergie .....	38
1.6.1 Hookesches Gesetz .....	38
1.6.2 Elastische Energie für isotrope homogene Schalen .....	38
1.6.3 Nichthomogene orthotrope Schalen .....	39
1.7 Elastizitätsbeziehungen .....	41
1.7.1 Die virtuelle Arbeit .....	41
1.7.2 Elastizitätsbeziehungen für isotrope homogene Schalen .....	43
1.7.3 Nichthomogene orthotrope Schalen .....	44
1.7.4 Spannungen .....	46
1.7.5 Elastizitätsbeziehungen für $S_\xi, S_\theta, H_\xi, H_\theta$ .....	46
1.8 Randbedingungen .....	48
1.8.1 Kräfte und Verschiebungen am Schalenrand .....	48
1.8.2 Beispiel .....	50
1.8.3 Randverzerrung .....	51
1.8.4 Kontinuitätsbedingungen .....	52

<b>2 Lösungswege der Schalentheorie</b> .....	53
2.1 Allgemeines .....	53
2.2 Statisch-geometrische Dualität .....	54
2.3 Komplexe Form von Schalengleichungen .....	55
2.4 Novozhilov-Gleichungen .....	56
2.5 Donnell-Mushtari-Wlassow-Koiter-Gleichungen .....	58
2.5.1 Annahmen .....	58
2.5.2 Lösungsgleichungen .....	60
2.5.3 Bemerkungen über $W$ und $w$ .....	61
2.5.4 Zylinderschalen .....	61
2.5.5 Flache Schalen .....	62
2.6 Membrantheorie .....	65
2.6.1 Hauptspannungszustand einer steifen Schale .....	65
2.6.2 Gleichgewicht .....	65
2.6.3 Randbedingungen .....	66
2.6.4 Membranspannungszustand ist schwach variierend mit $\xi, \theta$ .....	67
2.7 Flexible Schalen. Halbmembrantheorie .....	67
<b>3 Drehsymmetrisch belastete Rotationsschalen</b> .....	69
3.1 Allgemeines .....	69
3.2 Membrantheorie .....	69
3.2.1 Gleichgewicht eines Schalenelementes .....	69
3.2.2 Kugelkuppel unter Schneebelastung .....	72
3.2.3 Kugelkuppel unter Eigengewicht .....	73
3.2.4 Kegelskuppel .....	74
3.2.5 Kreisringschale bei Innendruck $q = \text{const}$ .....	74
3.2.6 Optimale Gestaltung .....	75
3.2.7 Verformung .....	77
3.2.8 Kuppel mit Randversteifung .....	79
3.3 Biegetheorie der Zylinderschale .....	80
3.3.1 Allgemeine Lösung .....	80
3.3.2 Langer Zylinder, Randeffect .....	83
3.3.3 Zylinder endlicher Länge .....	85
3.3.4 Flächenbelastung .....	86
3.3.5 Behälter unter hydrostatischem Druck .....	87
3.4 Biegetheorie .....	89
3.4.1 Verformung .....	89
3.4.2 Gleichgewichtsbedingungen .....	90
3.4.3 Reissner-Meissner-Gleichungen .....	92
3.4.4 Vereinfachung der Lösungsgleichungen .....	93
3.4.5 Randbedingungen .....	95

3.5 Lineare Lösung	96
3.5.1 Lösungsweg	96
3.5.2 Flächenlast	97
3.5.3 Randkräfte. Geckeler [57]-Staerman [142]-Lösung	98
3.5.4 Näherungsformel für den Randeffect	100
3.6 Kugelschale	101
3.6.1 Strenge Lösung	101
3.6.2 Asymptotische Lösung	102
3.6.3 Anwendungsbeispiel	103
3.6.4 Asymptotische Lösung für den Scheitelbereich	105
3.7 Kegelschale	107
3.7.1 Strenge Lösung	107
3.7.2 Extrem flache Schalen	108
3.7.3 Asymptotische Näherung	108
3.7.4 Anwendungsbeispiel	109
3.8 Kreisringschale	110
3.8.1 Lösungsgleichungen	110
3.8.2 Asymptotische Lösung	111
3.8.3 Kreisringschale unter Normaldruck	114
3.8.4 Toroidaler Kompensator	115
3.9 Drehsymmetrische Biegung krummer Rohre	118
3.9.1 Lösungsgleichungen	119
3.9.2 Lineare Rohrbiegung	120
3.9.3 Nichtlineare Biegung. Brazier-Problem	123
<b>4 Drehschalen. Belastung ohne Rotationssymmetrie</b>	<b>127</b>
4.1 Allgemeines	127
4.1.1 Variablentrennung	127
4.1.2 Drehsymmetrische Probleme	129
4.1.3 Die antimetrischen Saint-Venant-Probleme	130
4.2 Membrantheorie	132
4.2.1 Gleichgewichtsbedingungen	132
4.2.2 Windbelastung	133
4.2.3 Kugelschale. Beispiel	134
4.3 Biegetheorie, der antimetrische Fall	135
4.3.1 Integrale der Schalengleichungen	135
4.3.2 Schwerin-Chernina-Gleichungen	137
4.3.3 Randbedingungen	139
4.3.4 Anwendungen	141
4.4 Biegetheorie, der allgemeine Fall	142

<b>5 Zylinderschalen und krumme Rohre</b> .....	143
5.1 Allgemeines .....	143
5.2 Membrantheorie .....	144
5.2.1 Fourierreihenlösung .....	144
5.2.2 Übertragungsmatrix .....	146
5.2.3 Waagerechter Zylinderbehälter auf Endstützen .....	147
5.3 Biegetheorie von Zylinderschalen .....	151
5.3.1 Fourierreihenlösung .....	151
5.3.2 Aufspaltung des Spannungszustandes .....	154
5.3.3 Halbmembrantheorie .....	156
5.3.4 Randeffect .....	159
5.3.5 Anwendungsbeispiel: Zylinderbehälter .....	160
5.4 Rohrkrümmer .....	162
5.4.1 Halbmembrantheorie .....	163
5.4.2 Fourierreihenansatz. Variablentrennung .....	165
5.4.3 Biegung von Rohrkrümmern .....	171
<b>6 Stabilität</b> .....	176
6.1 Allgemeines .....	176
6.1.1 Schalenbeulung .....	176
6.1.2 Durchschlag .....	177
6.1.3 Imperfektionen .....	177
6.2 Stabilitätsgleichungen .....	179
6.2.1 Intensiv variierende Beulverformung .....	180
6.2.2 Stabilitätsgleichungen der Halbmembrantheorie .....	181
6.3 Zylinderschale unter Axialdruck .....	182
6.3.1 Die klassische Lösung .....	182
6.3.2 Kurze Schalen .....	185
6.3.3 Längere Schalen .....	185
6.3.4 Einfluß der Randstörung .....	187
6.3.5 Variierende Axialspannung. Unrunde Zylinder .....	188
6.4 Kreiszylinderschale unter Normaldruck .....	191
6.4.1 Die einfache Lösung .....	191
6.4.2 Starr eingebaute Ränder .....	194
6.5 Biegung von Zylinderschalen und vorgekrümmten Rohren .....	195
6.5.1 Vorbeulverformung .....	195
6.5.2 Lokale Stabilität .....	197
6.5.3 Beullasten .....	199
6.6 Kugelschale unter Außendruck .....	200
<b>Literatur</b> .....	202
<b>Sachverzeichnis</b> .....	208