

Finite-Element-Formulierungen mit abgestimmten Approximationsräumen für die Modellierung piezoelektrischer Stab- und Schalenstrukturen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Dieter Legner

aus Bretten

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Februar 2011

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. S. Klinkel

Karlsruhe 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	3
1.2	Stand der Forschung und Ziele der Arbeit	3
1.3	Gliederung der Arbeit	6
2	Elektromechanik deformierbarer Dielektrika	8
2.1	Grundlagen der Kontinuumsmechanik	8
2.1.1	Kinematik finiter Deformationen	8
2.1.2	Definition von Verzerrungsmaßen	10
2.2	Grundlagen der elektrostatischen Feldtheorie	12
2.2.1	Mikroskopische Betrachtung	12
2.2.2	Makroskopische Betrachtung	14
2.2.3	Theorie der linearen Piezoelektrizität	16
2.3	Bilanzgleichungen	17
2.3.1	Massenbilanz	18
2.3.2	Impulsbilanz	18
2.3.3	Drehimpulsbilanz	19
2.3.4	Ladungsbilanz	21
3	Stoffgleichungen deformierbarer Dielektrika	22
4	Inkompatible Approximationsräume der FEM bei elektromechanischen Feldproblemen	30
4.1	Stabmodell eines in Dickenrichtung gepolten piezoelektrischen Sensors	30
4.1.1	Längsbeanspruchung	31
4.1.2	Einachsige Biegebeanspruchung	31
4.1.3	Querbeanspruchung	32
4.1.4	Torsionsbeanspruchung	32
4.2	Verallgemeinerte Betrachtungsweise	33

5	Technologien der FEM zur Beseitigung inkompatibler Approximationsräume	36
5.1	Konsistente lineare Approximation der mechanischen und elektrischen Freiheitsgrade	36
5.2	Approximation mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung	38
6	Piezoelektrische FE Schalenformulierung	40
6.1	Vorbemerkungen zur Modellbildung	40
6.2	Kinematische Annahmen der Schalenformulierung	42
6.2.1	Mechanischer Teil	42
6.2.2	Elektrischer Teil	45
6.2.3	Generalisierte Darstellung der kinematischen Schalengrößen	46
6.3	Variationsformulierung des Randwertproblems	46
6.3.1	Green'sche Verzerrungen	46
6.3.2	Elektrisches Feld	53
6.3.3	Generalisierte Darstellung der unabhängigen Schalengrößen	55
6.3.4	Formulierung des Randwertproblems	56
6.3.5	Schwache Form und Linearisierung des Randwertproblems	58
6.4	Finite-Elemente-Approximation	59
6.4.1	Approximation von Ausgangskonfiguration und Momentan- konfiguration der Schale	59
6.4.2	Interpolation der Spannungen und der dielektrischen Ver- schiebungen	65
6.4.3	Interpolation der Verzerrungen und des elektrischen Feldes	66
6.4.4	Approximation der schwachen Form des Randwertproblems	68
7	Numerische Beispiele - Piezoelektrische Schalenformulierung	71
7.1	Piezoelektrische Patch-Tests	71
7.1.1	Membranbeanspruchung durch Längsbelastung	72
7.1.2	Membranbeanspruchung durch ein elektrisches Feld	73
7.1.3	Reine Biegebeanspruchung	73
7.1.4	Querbeanspruchung	74

7.2	Bimorph-Aktor	79
7.3	Schub- und Torsionsaktor	80
7.4	Geschichteter Querschnitt unter Querbelastung	84
7.4.1	Validierung der Schubsteifigkeit	85
7.4.2	Mechanischer Sandwichquerschnitt	85
7.4.3	Piezoelektrischer Multimorph	89
7.5	Zylinderförmiger Segmentaktor	91
7.6	Dynamische Beanspruchung einer halbkreisförmigen Ringschale	96
8	Piezoelektrische FE 3D-Stabformulierung	101
8.1	Vorbemerkungen zur Modellbildung	101
8.2	Kinematische Annahmen der Stabformulierung	102
8.2.1	Mechanischer Teil	102
8.2.2	Elektrischer Teil	105
8.2.3	Generalisierte Darstellung der kinematischen Stabgrößen	107
8.3	Variationsformulierung des Randwertproblems	108
8.3.1	Green'sche Verzerrungen	108
8.3.2	Elektrisches Feld	110
8.3.3	Generalisierte Darstellung der unabhängigen Stabgrößen	113
8.3.4	Formulierung des Randwertproblems	113
8.3.5	Schwache Form und Linearisierung des Randwertproblems	115
8.4	Finite-Elemente-Approximation	116
8.4.1	Approximation von Ausgangskonfiguration und Momentan- konfiguration des Stabes	116
8.4.2	Interpolation der Spannungen und der dielektrischen Ver- schiebungen	118
8.4.3	Interpolation der Verzerrungen und des elektrischen Feldes	119
8.4.4	Approximation der schwachen Form des Randwertproblems	120

9	Numerische Beispiele - Piezoelektrische Stabformulierung	123
9.1	Piezoelektrische Patch-Tests	123
9.1.1	Längsbeanspruchung	124
9.1.2	Einachsige Biegebeanspruchung	125
9.1.3	Querbeanspruchung	126
9.1.4	Torsionsbeanspruchung	128
9.1.5	Beanspruchung durch ein elektrisches Feld	131
9.2	Piezoelektrischer Stab auf zwei Stützen	131
9.3	Piezoelektrischer Kragarm unter Endmoment	134
9.4	Kreisringensensor unter Querbelastung	136
10	Zusammenfassung	138
11	Ausblick	140
12	Empfehlungen für die Praxis	141
12.1	Sensoren	141
12.1.1	Dehnsensoren	141
12.1.2	Biegesensoren	141
12.2	Aktoren	142
12.2.1	Unbehinderte Verformung	142
12.2.2	Keine unbehinderte Verformung	142
A	Transformation zwischen lokalen und globalen elektrischen Freiheitsgraden	143
B	Orthogonalisierungskoeffizienten für die EAS-Ansätze der Schalen- und Stabformulierung	144
B.1	Schalenformulierung	144
B.2	Stabformulierung	145
C	Herleitung der analytischen Lösung für den Biegesensor bei Querbelastung	146

D	Verlauf der Schubspannung über die Dicke bei einem geschichteten Querschnitt	149
E	Materialdaten	151
E.1	Beispiel: Torsionsaktor	151
E.2	Beispiele: Dynamische Beanspruchung einer halbkreisförmigen Ringschale und Kragarm unter Endmoment	151
E.3	Beispiele: Zylinderförmiger Segmentaktor und Kreisringensensor unter Querbelastung	152
E.4	Beispiel: Piezoelektrischer Stab auf zwei Stützen	152
	Literatur	153