Infinitesimalrechnung

und

Nichtlineare Optimierung

Einführung
in die
Differential- und Integralrechnung

Anwendungsbeispiele
aus dem
Bereich der Wirtschaft

von

Franz Josef Fay

Oberstudienrat am Ruhr-Kolleg, Essen
Dozent für Wirtschaftsmathematik an der HWF, Bochum

Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler, Wiesbaden

Inhaltsverzeichnis

A. Einführung in die Differentialrechnung und ihre Anwendung zur Ermittlung optimaler Daten 11

I. Die Steigung einer Kurve und die Ableitung der zugehörigen Funktion 11

II. Der Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten 14

III. Die Ableitung der Funktionen $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^n$ . . 16

IV. Die Ableitung von Summen, Produkten und Quotienten von Funktionen 18

V. Die Kettenregel 21

VI. Die Erweiterung der Potenzregel auf gebrochene und negative Exponenten 23

1. Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt{x}$ 23

2. Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt[n]{x}$ 24

3. Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt[n]{x^m}$ 25

4. Ableitung einer Funktion mit negativem n 26

5. Übungsbeispiele 27

VII. Maxima und Minima 29

VIII. Beispiele für die Bestimmung von optimalen Bedingungen im Wirtschaftsbereich 32

IX. Die Ermittlung optimaler Lagerbestände 40

X. Das wirtschaftliche Prinzip und das Prinzip von Fermat . . . 44

1. Die Beweisbarkeit des Fermatschen Prinzips aus dem wirtschaftlichen Prinzip 44

2. Beweis der Gültigkeit des Prinzips von Fermat bei der Reflexion des Lichtes 45

3. Beweis der Gültigkeit des Prinzips von Fermat bei der Lichtbrechung 49

4. Vergleichendes Beispiel für ein Kostenminimum 53

B. Einführung in die Integralrechnung 55

I. Der Integralbegriff bei Leibniz 55

II. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 57

III. Integrationsregeln 59

IV. Beispiele für eine Flächenberechnung und für die Volumenberechnung von Rotationskörpern 60

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Produktionsprozesse . . 63

I. Die Auswirkung von fixen und variablen Kosten auf Kostenkurven und Kostenfunktionen 63

1. Kostenarten 63
2. Kostenkurven und Kostenfunktionen 64
3. Fixe und variable Kosten bei der Erzeugung elektrischer Energie 67
   a) Wasserkraftwerke 67
   b) Wärmekraftwerke 68

II. Gewinnmaximierung bei nichtlinearer Kostenfunktion und linearen Erlösfunktionen 69

1. Bestimmung der Kostenfunktion aus der Kostenkurve . . 69
2. Abgrenzung der Begriffe Differentialkosten und Grenzkosten 73
3. Rechnerische Bestimmung des Gewinnmaximums und des Stückkostenminimums 75
   a) Das Gewinnmaximum 75
   b) Das Stückkostenminimum 76
4. Zeichnerische Bestimmung des Gewinnmaximums und des Stückkostenminimums mit Hilfe von Tangenten an die Kostenkurve 78
5. Übungsbeispiele 79
6. Beispiel für die Bestimmung einer Kostenfunktion aus Mittelwerten 82

III. Erlösmaximum und Gewinnmaximum bei linearer Kostenfunktion und nichtlinearer Erlösfunktion 85

IV. Gewinnmaximierung bei nichtlinearer Kostenfunktion und nichtlinearer Erlösfunktion 87

D. Infinitesimale Betrachtung von Angebot und Nachfrage 90

I. Anwendung der Integralrechnung bei der Bestimmung einer Konsumentenrente und einer Produzentenrente 90

1. Nachfragekurve und Nachfragefunktion 91
2. Angebotskurve und Angebotsfunktion 93
3. Der Gleichgewichtspreis 93
4. Die Konsumentenrente 94
5. Die Produzentenrente 95

II. Die Elastizität von Angebot und Nachfrage 97

1. Der Begriff Elastizität in der Wirtschaftslehre 97
2. Elastische und unelastische Nachfragen und Angebote . . 97
3. Analytische Erfassung der Elastizität 99
4. Zahlenmäßige Bestimmung der Elastizität 101
   a) Für die Nachfragefunktion 101
   b) Für die Angebotsfunktion 103
5. Kostenelastizität für die Gesamtkosten 103