

N. BOURBAKI

# Éléments de mathématique

FASCICULE XXXVIII

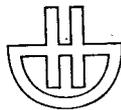
## GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

CHAPITRE VII

Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers

CHAPITRE VIII

Algèbres de Lie semi-simples déployées



HERMANN

# TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE VII. — SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN. ÉLÉMENTS RÉGULIERS .....	7
§ 1. <i>Décomposition primaire des représentations linéaires</i> .....	7
1. Décomposition d'une famille d'endomorphismes .....	7
2. Cas d'une famille linéaire d'endomorphismes .....	12
3. Décomposition des représentations d'une algèbre de Lie nilpotente .....	13
4. Décomposition d'une algèbre de Lie relativement à un automorphisme .....	16
5. Invariants d'une algèbre de Lie semi-simple relativement à une action semi-simple .....	17
§ 2. <i>Sous-algèbres de Cartan et éléments réguliers d'une algèbre de Lie</i> .....	18
1. Sous-algèbres de Cartan .....	18
2. Éléments réguliers d'une algèbre de Lie .....	21
3. Sous-algèbres de Cartan et éléments réguliers .....	23
4. Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie semi-simples ...	25
§ 3. <i>Théorèmes de conjugaison</i> .....	26
1. Automorphismes élémentaires .....	26
2. Conjugaison des sous-algèbres de Cartan .....	28
3. Applications de la conjugaison .....	29
4. Conjugaison des sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie résolubles .....	31
5. Cas des groupes de Lie .....	32
§ 4. <i>Éléments réguliers d'un groupe de Lie</i> .....	33
1. Éléments réguliers pour une représentation linéaire .....	33
2. Éléments réguliers d'un groupe de Lie .....	35
3. Relations avec les éléments réguliers de l'algèbre de Lie .....	37
4. Application aux automorphismes élémentaires .....	39

§ 5. Algèbres de Lie linéaires scindables .....	40
1. Algèbres de Lie linéaires scindables .....	40
2. Enveloppe scindable .....	42
3. Décompositions des algèbres scindables .....	43
4. Algèbres de Lie linéaires d'endomorphismes nilpotents .....	45
5. Caractérisations des algèbres de Lie scindables .....	48
Appendice I. — Applications polynomiales et topologie de Zariski .....	51
1. Topologie de Zariski .....	51
2. Applications polynomiales dominantes .....	52
Appendice II. — Une propriété de connexion .....	53
Exercices du § 1 .....	55
Exercices du § 2 .....	58
Exercices du § 3 .....	60
Exercices du § 4 .....	63
Exercices du § 5 .....	64
Exercices de l'Appendice I .....	66
Exercices de l'Appendice II .....	66
<b>CHAPITRE VIII. — ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES DÉPLOYÉES</b> .....	<b>68</b>
§ 1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, k)$ et ses représentations .....	68
1. Base canonique de $\mathfrak{sl}(2, k)$ .....	68
2. Éléments primitifs des $\mathfrak{sl}(2, k)$ -modules .....	69
3. Les modules simples $V(m)$ .....	71
4. Représentations linéaires du groupe $\mathbf{SL}(2, k)$ .....	72
5. Quelques éléments de $\mathbf{SL}(2, k)$ .....	74
§ 2. Système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple déployée .....	75
1. Algèbres de Lie semi-simples déployées .....	75
2. Racines d'une algèbre de Lie semi-simple déployée .....	76
3. Formes bilinéaires invariantes .....	81
4. Les coefficients $N_{\alpha\beta}$ .....	82
§ 3. Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples déployées .....	84
1. Sous-algèbres stables par $\text{ad } \mathfrak{h}$ .....	84
2. Idéaux .....	88
3. Sous-algèbres de Borel .....	88
4. Sous-algèbres paraboliques .....	91
5. Le cas non déployé .....	93

§ 4. <i>Algèbre de Lie semi-simple déployée définie par un système de racines réduit</i>	93
1. Algèbres de Lie semi-simples épinglées	93
2. Une construction préliminaire	94
3. Théorème d'existence	98
4. Théorème d'unicité	102
§ 5. <i>Automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple</i>	104
1. Automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple épinglée	104
2. Automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple déployée	105
3. Automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple déployable	109
4. Topologie de Zariski sur $\text{Aut}(\mathfrak{g})$	111
5. Cas des groupes de Lie	113
§ 6. <i>Modules sur une algèbre de Lie semi-simple déployée</i>	113
1. Poids et éléments primitifs	113
2. Modules simples ayant un plus grand poids	116
3. Théorème d'existence et d'unicité	117
4. Commutant de $\mathfrak{h}$ dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$	119
§ 7. <i>Modules de dimension finie sur une algèbre de Lie semi-simple déployée</i>	121
1. Poids d'un $\mathfrak{g}$ -module simple de dimension finie	121
2. Plus grand poids d'un $\mathfrak{g}$ -module simple de dimension finie	123
3. Poids minuscules	127
4. Produits tensoriels de $\mathfrak{g}$ -modules	129
5. Dual d'un $\mathfrak{g}$ -module	131
6. Anneau des représentations	133
7. Caractères des $\mathfrak{g}$ -modules	136
§ 8. <i>Invariants symétriques</i>	137
1. Exponentielle d'une forme linéaire	138
2. L'injection de $k[P]$ dans $S(\mathfrak{h})^*$	139
3. Fonctions polynomiales invariantes	140
4. Propriétés de $\text{Aut}_0$	144
5. Centre de l'algèbre enveloppante	145
§ 9. <i>La formule de Hermann Weyl</i>	148
1. Caractères des $\mathfrak{g}$ -modules de dimension finie	148
2. Dimension des $\mathfrak{g}$ -modules simples	151
3. Multiplicité des poids des $\mathfrak{g}$ -modules simples	152
4. Décomposition du produit tensoriel de deux $\mathfrak{g}$ -modules simples	153

§ 10. <i>Sous-algèbres maximales des algèbres de Lie semi-simples</i> .....	154
§ 11. <i>Classes d'éléments nilpotents et <math>\mathfrak{sl}_2</math>-triplets</i> .....	159
1. Définition des $\mathfrak{sl}_2$ -triplets .....	159
2. Les $\mathfrak{sl}_2$ -triplets dans les algèbres semi-simples .....	161
3. Éléments simples .....	163
4. Éléments principaux .....	166
§ 12. <i>Ordres de Chevalley</i> .....	169
1. Réseaux et ordres .....	169
2. Puissances divisés dans une bigèbre .....	169
3. Une variante entière du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt .....	170
4. Exemple: polynômes à valeurs entières .....	172
5. Quelques formules .....	173
6. Biordres dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie réductive déployée .....	176
7. Ordres de Chevalley .....	180
8. Réseaux admissibles .....	182
§ 13. <i>Algèbres de Lie déployables classiques</i> .....	185
1. Algèbres de type $A_l$ ( $l \geq 1$ ) .....	185
2. Algèbres de type $B_l$ ( $l \geq 1$ ) .....	191
3. Algèbres de type $C_l$ ( $l \geq 1$ ) .....	200
4. Algèbres de type $D_l$ ( $l \geq 2$ ) .....	206
<i>Table 1</i> .....	213
<i>Table 2</i> .....	214
Exercices du § 1 .....	215
Exercices du § 2 .....	220
Exercices du § 3 .....	222
Exercices du § 4 .....	224
Exercices du § 5 .....	225
Exercices du § 6 .....	229
Exercices du § 7 .....	229
Exercices du § 8 .....	238
Exercices du § 9 .....	240
Exercices du § 10 .....	245
Exercices du § 11 .....	246
Exercices du § 13 .....	249

Index des notations .....	254
Index terminologique.....	256
Résumé de quelques propriétés importantes des algèbres de Lie semi-simples .....	259