

# Primal-Dual-Beziehungen in Graphenalgorithmen

Agathe Beuermann-Wehmeyer

1975

---

Verlag Anton Hain · Meisenheim am Glan

<u>Inhaltsverzeichnis</u>		Seite
	Einleitung	7
I.	Die graphentheoretischen Sätze von König und Egerváry als Primal-Dual-Sätze	11
1.	Graphentheoretische Grundlagen	11
1.1.	Axiome der Graphentheorie	11
1.1.1.	Ungerichtete Graphen	12
1.1.2.	Gerichtete Graphen	16
1.1.3.	Bewertete Graphen und Multigraphen	18
1.1.4.	Abbildung von Graphen in Matrizen	19
1.2.	Faktorenzerlegung bei paaren Graphen	21
1.2.1.	Faktorenzerlegung bei regulären paaren Graphen	23
1.2.2.	Anwendung des Satzes 1 über Faktoren- zerlegung in regulären paaren Graphen auf Determinanten	30
1.2.3.	Der Satz von König: Trennende Knoten- punkte bei paaren Graphen	32
2.	Primal-Dual-Beziehungen	45
2.1.	Formulierung von Primal- und zugehöri- gen Dualproblemen	46
2.1.1.	Für Standard LP-Probleme	46
2.1.2.	Für LP-Probleme in kanonischer Form	47
2.2.	Sätze über Dualität	50
2.2.1.	Das Optimalitätskriterium	52
2.2.2.	Das Gleichgewichtstheorem	54
2.3.	Der Unterschied zwischen Primal-, Dual- und Primal-Dual-Algorithmen	59
2.4.	Beweis des Satzes von König mit Hilfe des Primal-Dual-Theorems	60

	Seite	
3.	Erweiterung des Satzes von König zum Satz von Egerváry	64
3.1.	Der Satz von Egerváry	64
3.2.	Beweis des Satzes von Egerváry mit Hilfe des allgemeinen Primal-Dual-Theorems	66
3.3.	Erweiterung des Satzes von Egerváry auf eine $mn$ -Matrix ( $m \neq n$ )	69
3.4.	Nachweis der Ganzzahligkeit für die Dualvariablen $u_i$ und $v_j$ im Optimum	76
3.5.	Beschränkung der Dualvariablen $u_i$ und $v_j$ auf den semipositiven Bereich	83
II.	Strukturvergleich zwischen den graphentheoretischen Sätzen, dem Zuordnungs- und dem Transportproblem	90
1.	Darstellung des Zuordnungsproblems	90
1.1.	Konkrete Zuordnungsprobleme	93
1.1.1.	Unbewertete Zuordnungsprobleme	94
1.1.2.	Bewertete Zuordnungsprobleme	97
1.1.2.1.	Bewertung der Kanten mit Nutzeneinheiten	97
1.1.2.2.	Bewertung der Kanten mit Leistungseinheiten	98
1.1.2.3.	Bewertung der Kanten mit Geldeinheiten	99
1.2.	Ökonomische Interpretation der Primal-Dual-Beziehung im Zuordnungsproblem	100
1.3.	Voraussetzung für die Lösbarkeit eines Zuordnungsproblems	102
1.4.	Bestimmung sämtlicher möglicher Lösungen des Zuordnungsproblems (vollständige Enumeration)	103

	Seite	
2.	Lösungsalgorithmen für das Zuordnungsproblem	110
2.1.	Der Primal-Dual-Algorithmus von Kuhn	111
2.2.	Der Primal-Algorithmus von Flood	136
2.3.	Der Primal-Algorithmus von Munkres im Vergleich mit den Algorithmen von Kuhn und Flood	146
2.3.1.	Bestimmung einer beschränkt zulässigen Lösung des Primals	146
2.3.2.	Bestimmung der Maximalzahl von unabhängigen Zuordnungen	151
2.3.3.	Bestimmung einer erweiterten beschränkt zulässigen Lösung des Primals	152
2.4.	Lösung mit Hilfe des Netzflußalgorithmus von Ford/Fulkerson	155
2.4.1.	Definition eines Netzwerkes	156
2.4.2.	Das Zuordnungsproblem als Netzflußproblem	159
3.	Darstellung des Transportproblems	163
3.1.	Formulierung des Problems	163
3.2.	Ökonomische Interpretation der Primal-Dual-Beziehung	165
3.3.	Strukturvergleich zwischen Zuordnungs- und Transportproblem	170
3.4.	Transformation eines Transportproblems in ein Zuordnungsproblem	173
4.	Anwendung der Algorithmen für Zuordnungsprobleme auf Transportprobleme	176
4.1.	Bestimmung der zulässigen Transportwege durch den Primal-Dual-Algorithmus und den Primal-Algorithmus	177
4.2.	Festlegung der Transportmengen	177

	Seite	
4.2.1.	Das Deckungslinienverfahren von Egerváry	178
4.2.2.	Das Deckungslinienverfahren von Munkres	179
III.	Strukturvergleich zwischen dem Satz über trennende Knotenpunkte, dem Min-cut-Max-flow-Satz und den Sätzen von Kelley und von Ford/Fulkerson zur parametrischen Projektkostenminimierung	190
1.	Beziehung zwischen den Sätzen von König, von Menger und dem Min-cut-Max-flow-Satz	190
1.1.	Der Satz von Menger	190
1.2.	Erweiterung des Satzes von Menger zum Min-cut-Max-flow-Satz	192
1.3.	Beweis des Min-cut-Max-flow-Satzes und des Satzes von Menger mit Hilfe des Primal-Dual-Theorems	195
1.3.1.	Der Min-cut-Max-flow-Satz als Primal-Dual-Satz	195
1.3.2.	Der Satz von Menger als Primal-Dual-Satz	202
1.4.	Der Max-flow-Algorithmus von Ford/Fulkerson, ein Primal-Algorithmus	204
2.	Transformation des Problems der kostenoptimalen Netzplanverkürzung zum Problem des maximalen Flusses über die Dualität	209

	Seite	
2.1.	Das Problem von Kelley	210
2.2.	Das Problem von Ford und Fulkerson im Vergleich zum Problem von Kelley	231
	Literaturverzeichnis	234