

Dietrich Braess

# Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und  
Anwendungen in der Elastizitätstheorie

Mit 47 Abbildungen

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York  
London Paris Tokyo  
Hong Kong Barcelona  
Budapest

M  
Technische Hochschule Darmstadt  
Fachbereich Mechanik  
Bibliothek  
W.-Nr. BM 75/92

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	v
Bezeichnungen .....	xi

## *Kapitel I* *Einführung*

§ 1. Beispiele und Typeneinteilung .....	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 8 — Sachgemäß gestellte Probleme 9	
§ 2. Maximum-Prinzip .....	12
Beispiele 13 — Folgerungen 14	
§ 3. Differenzenverfahren .....	16
Diskretisierung 16 — Diskretes Maximum-Prinzip 19	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren .....	22
Konsistenz 22 — Lokaler und globaler Fehler 22 — Grenzen der Konvergenztheorie 25	

## *Kapitel II* *Konforme Finite Elemente*

§ 1. Sobolev-Räume .....	28
Einführung der Sobolev-Räume 28 — Die Friedrichssche Ungleichung 30 — Singularitäten von $H^1$ -Funktionen 31 — Kompakte Einbettungen 32	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung ...	34
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 41	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz .....	43
Elliptizität in $H^1$ 43 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingungen 44 — Neumannsche Randbedingungen 45 — Gemischte Randbedingungen 46 — Beweis des Spursatzes 46 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 49	
§ 4. Ritz-Galerkin-Verfahren und einfache Finite Elemente .....	52
Modellproblem 55	
§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente .....	58
Forderungen an die Triangulierung 59 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 60 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen	

62 — Bemerkung zu $C^1$ -Elementen	63 — Bilineare Elemente	65 — Quadratische Viereckelemente	67 — Affine Familien	67 — Zur Auswahl von Elementen	69
§ 6. Approximationssätze					71
Der Fragenkreis um das Bramble-Hilbert-Lemma	72 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen	73 — Bilineare Viereckelemente	77 — Inverse Abschätzungen	77 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen	78
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung					82
Bemerkungen zu Regularitätssätzen	82 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm	83 — $L_2$ -Abschätzungen	84 — Eine einfache $L_\infty$ -Abschätzung	86	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen					88
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix	88 — Innere Kondensation	90 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix	91 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes	91 — Teilweise Netzverfeinerungen	91

### *Kapitel III*

#### *Nichtkonforme und andere Methoden*

§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation					96
Die Lemmas von Strang	96 — Dualitätstechnik	98 — Das Crouzeix-Raviart-Element	99 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder	102 — Modifikationen beim Dualitätsargument	104
§ 2. Isoparametrische Elemente					107
Isoparametrische Dreieckelemente	107 — Isoparametrische Viereckelemente	109			
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel					112
Negative Normen	112 — Adjungierte Operatoren	114 — Ein abstrakter Existenzsatz	114 — Ein abstrakter Konvergenzsatz	116 — Beweis von Satz 3.4	117
§ 4. Sattelpunktprobleme					119
Sattelpunkte und Minima	119 — Die inf-sup-Bedingung	120 — Gemischte Finite-Element-Methoden	124 — Die Laplacegleichung als gemischtes Problem	126 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm	128
§ 5. Die Stokessche Gleichung					134
Variationsformulierung	135 — Die inf-sup-Bedingung	136 — Bemerkungen zur Brezzi-Bedingung	137 — Fast inkompressible Strömungen	138	
§ 6. Finite Elemente für das Stokes Problem					139
Ein instabiles Element	139 — Das Taylor-Hood-Element	144 — Das Mini-Element	145 — Das divergenzfreie nichtkonforme $P_1$ -Element	145	

*Kapitel IV**Die Methode der konjugierten Gradienten*

§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	149
Stationäre lineare Prozesse 149 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren	
151 — Das Modellproblem 154 — Overrelaxation 154	
§ 2. Gradientenverfahren	158
Das allgemeine Gradientenverfahren 158 — Gradientenverfahren und	
quadratische Funktionen 159 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit	
großer Kondition 161	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen	164
Der Algorithmus 166 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Ver-	
fahren 168 — Verfahren der konjugierten Residuen 170	
§ 4. Vorkonditionierung	173
Vorkonditionierung durch SSOR 176 — Vorkonditionierung durch ILU	
177 — Bemerkungen zur Parallelisierung 179 — Nichtlineare Probleme	
180	
§ 5. Sattelpunktprobleme	183
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 183 — Verbesserung der	
approximativen Inversen 185	

*Kapitel V**Mehrgitterverfahren*

§ 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben	188
Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 188 — Die Mehr-	
gitter-Idee 189 — Der Algorithmus 190 — Der Übergang zwischen den	
Gittern 194	
§ 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren	198
Diskrete Normen 199. — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 201 —	
Approximationseigenschaft 203 — Konvergenzbeweis für das Zweigit-	
terverfahren 204	
§ 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen	207
Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 207 — Die Verschärfung für	
die Energienorm 208 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 209	
§ 4. Berechnung von Startwerten	214
Bestimmung von Startwerten 214 — Komplexität 216 — Mehrgitter-	
verfahren mit wenigen Ebenen 217	
§ 5. Nichtlineare Probleme	219
Mehrgitter-Newton-Verfahren 220 — Das nichtlineare Mehrgitterverfah-	
ren 221 — Zur Konvergenz des Newton-Verfahrens 223 — Die Konti-	
nuitätsmethode 224 — Realisierung bei Mehrgitterverfahren 227	

*Kapitel VI**Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper*

§ 1. Einführung in die Elastizitätstheorie .....	230
Kinematik 230 — Gleichgewichtsbedingungen 232 — Die Piola-Transformation 233 — Materialgesetze 234 — Kleine Verzerrungen 238	
§ 2. Hyperelastische Materialien .....	240
§ 3. Lineare Elastizitätstheorie .....	243
Das Variationsproblem 243 — Die reine Verschiebungsmethode 247 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 249 — Die gemischte Methode nach Hu-Washizu 251 — Fast inkompressibles Material 252 — Locking 253	
§ 4. Scheibe .....	257
Ebener Spannungszustand 257 — Ebener Verzerrungszustand 258 — Scheibenelemente 258 — Das PEERS-Element 259 — Zur Implementierung 263	
§ 5. Balken und Platten: Die Kirchhoff-Platte .....	264
Die Hypothesen 264 — Gemischte Methoden 267 — DKT-Elemente 269	
§ 6. Der Timoshenko-Balken .....	275
Der Verschiebungsansatz 275 — Reduzierte Integration 277 — Ein äquivalenter gemischter Ansatz 277	
§ 7. Die Mindlin-Reissner-Platte .....	281
Die Helmholtz-Zerlegung 282 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zerlegung 283 — MITC-Elemente 285	
Literatur .....	292
Sachverzeichnis .....	299