

Dietrich Braess

Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und
Anwendungen in der Elastizitätstheorie

Mit 47 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

M
Technische Hochschule Darmstadt
Fachbereich Mechanik
Bibliothek
W.-Nr. BM 75/92

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---------------------|----|
| Vorwort | v |
| Bezeichnungen | xi |

Kapitel I *Einführung*

| | |
|---|----|
| § 1. Beispiele und Typeneinteilung | 2 |
| Beispiele 2 — Typeneinteilung 8 — Sachgemäß gestellte Probleme 9 | |
| § 2. Maximum-Prinzip | 12 |
| Beispiele 13 — Folgerungen 14 | |
| § 3. Differenzenverfahren | 16 |
| Diskretisierung 16 — Diskretes Maximum-Prinzip 19 | |
| § 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren | 22 |
| Konsistenz 22 — Lokaler und globaler Fehler 22 — Grenzen der Konvergenztheorie 25 | |

Kapitel II *Konforme Finite Elemente*

| | |
|---|----|
| § 1. Sobolev-Räume | 28 |
| Einführung der Sobolev-Räume 28 — Die Friedrichssche Ungleichung 30 — Singularitäten von H^1 -Funktionen 31 — Kompakte Einbettungen 32 | |
| § 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung ... | 34 |
| Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 41 | |
| § 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz | 43 |
| Elliptizität in H^1 43 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingungen 44 — Neumannsche Randbedingungen 45 — Gemischte Randbedingungen 46 — Beweis des Spursatzes 46 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 49 | |
| § 4. Ritz-Galerkin-Verfahren und einfache Finite Elemente | 52 |
| Modellproblem 55 | |
| § 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente | 58 |
| Forderungen an die Triangulierung 59 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 60 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen | |

| | | | | | |
|---|--|--|--|--|----|
| 62 — Bemerkung zu C^1 -Elementen | 63 — Bilineare Elemente | 65 — Quadratische Viereckelemente | 67 — Affine Familien | 67 — Zur Auswahl von Elementen | 69 |
| § 6. Approximationssätze | | | | | 71 |
| Der Fragenkreis um das Bramble-Hilbert-Lemma | 72 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen | 73 — Bilineare Viereckelemente | 77 — Inverse Abschätzungen | 77 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen | 78 |
| § 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung | | | | | 82 |
| Bemerkungen zu Regularitätssätzen | 82 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm | 83 — L_2 -Abschätzungen | 84 — Eine einfache L_∞ -Abschätzung | 86 | |
| § 8. Rechentechnische Betrachtungen | | | | | 88 |
| Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix | 88 — Innere Kondensation | 90 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix | 91 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes | 91 — Teilweise Netzverfeinerungen | 91 |

Kapitel III

Nichtkonforme und andere Methoden

| | | | | | |
|---|--|---|---|---|-----|
| § 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation | | | | | 96 |
| Die Lemmas von Strang | 96 — Dualitätstechnik | 98 — Das Crouzeix-Raviart-Element | 99 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder | 102 — Modifikationen beim Dualitätsargument | 104 |
| § 2. Isoparametrische Elemente | | | | | 107 |
| Isoparametrische Dreieckelemente | 107 — Isoparametrische Viereckelemente | 109 | | | |
| § 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel | | | | | 112 |
| Negative Normen | 112 — Adjungierte Operatoren | 114 — Ein abstrakter Existenzsatz | 114 — Ein abstrakter Konvergenzsatz | 116 — Beweis von Satz 3.4 | 117 |
| § 4. Sattelpunktprobleme | | | | | 119 |
| Sattelpunkte und Minima | 119 — Die inf-sup-Bedingung | 120 — Gemischte Finite-Element-Methoden | 124 — Die Laplacegleichung als gemischtes Problem | 126 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm | 128 |
| § 5. Die Stokessche Gleichung | | | | | 134 |
| Variationsformulierung | 135 — Die inf-sup-Bedingung | 136 — Bemerkungen zur Brezzi-Bedingung | 137 — Fast inkompressible Strömungen | 138 | |
| § 6. Finite Elemente für das Stokes Problem | | | | | 139 |
| Ein instabiles Element | 139 — Das Taylor-Hood-Element | 144 — Das Mini-Element | 145 — Das divergenzfreie nichtkonforme P_1 -Element | 145 | |

*Kapitel IV**Die Methode der konjugierten Gradienten*

| | |
|---|-----|
| § 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme | 149 |
| Stationäre lineare Prozesse 149 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren | |
| 151 — Das Modellproblem 154 — Overrelaxation 154 | |
| § 2. Gradientenverfahren | 158 |
| Das allgemeine Gradientenverfahren 158 — Gradientenverfahren und | |
| quadratische Funktionen 159 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit | |
| großer Kondition 161 | |
| § 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen | 164 |
| Der Algorithmus 166 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Ver- | |
| fahren 168 — Verfahren der konjugierten Residuen 170 | |
| § 4. Vorkonditionierung | 173 |
| Vorkonditionierung durch SSOR 176 — Vorkonditionierung durch ILU | |
| 177 — Bemerkungen zur Parallelisierung 179 — Nichtlineare Probleme | |
| 180 | |
| § 5. Sattelpunktprobleme | 183 |
| Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 183 — Verbesserung der | |
| approximativen Inversen 185 | |

*Kapitel V**Mehrgitterverfahren*

| | |
|--|-----|
| § 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben | 188 |
| Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 188 — Die Mehr- | |
| gitter-Idee 189 — Der Algorithmus 190 — Der Übergang zwischen den | |
| Gittern 194 | |
| § 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren | 198 |
| Diskrete Normen 199. — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 201 — | |
| Approximationseigenschaft 203 — Konvergenzbeweis für das Zweigit- | |
| terverfahren 204 | |
| § 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen | 207 |
| Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 207 — Die Verschärfung für | |
| die Energienorm 208 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 209 | |
| § 4. Berechnung von Startwerten | 214 |
| Bestimmung von Startwerten 214 — Komplexität 216 — Mehrgitter- | |
| verfahren mit wenigen Ebenen 217 | |
| § 5. Nichtlineare Probleme | 219 |
| Mehrgitter-Newton-Verfahren 220 — Das nichtlineare Mehrgitterverfah- | |
| ren 221 — Zur Konvergenz des Newton-Verfahrens 223 — Die Konti- | |
| nuitätsmethode 224 — Realisierung bei Mehrgitterverfahren 227 | |

*Kapitel VI**Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper*

| | |
|--|-----|
| § 1. Einführung in die Elastizitätstheorie | 230 |
| Kinematik 230 — Gleichgewichtsbedingungen 232 — Die Piola-Transformation 233 — Materialgesetze 234 — Kleine Verzerrungen 238 | |
| § 2. Hyperelastische Materialien | 240 |
| § 3. Lineare Elastizitätstheorie | 243 |
| Das Variationsproblem 243 — Die reine Verschiebungsmethode 247 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 249 — Die gemischte Methode nach Hu-Washizu 251 — Fast inkompressibles Material 252 — Locking 253 | |
| § 4. Scheibe | 257 |
| Ebener Spannungszustand 257 — Ebener Verzerrungszustand 258 — Scheibenelemente 258 — Das PEERS-Element 259 — Zur Implementierung 263 | |
| § 5. Balken und Platten: Die Kirchhoff-Platte | 264 |
| Die Hypothesen 264 — Gemischte Methoden 267 — DKT-Elemente 269 | |
| § 6. Der Timoshenko-Balken | 275 |
| Der Verschiebungsansatz 275 — Reduzierte Integration 277 — Ein äquivalenter gemischter Ansatz 277 | |
| § 7. Die Mindlin-Reissner-Platte | 281 |
| Die Helmholtz-Zerlegung 282 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zerlegung 283 — MITC-Elemente 285 | |
| Literatur | 292 |
| Sachverzeichnis | 299 |