

Josef Stoer

# Numerische Mathematik 1

Eine Einführung – unter Berücksichtigung  
von Vorlesungen von F. L. Bauer

Siebente, neubearbeitete und erweiterte Auflage  
mit 9 Abbildungen

---

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York

London Paris Tokyo

Hong Kong Barcelona

Budapest

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fehleranalyse</b>	<b>1</b>
1.1	Zahldarstellung	2
1.2	Rundungsfehler und Gleitpunktrechnung	5
1.3	Fehlerfortpflanzung	9
1.4	Beispiele	22
1.5	Intervallrechnung, statistische Rundungsfehlerabschätzungen	29
	Übungsaufgaben zu Kapitel 1	35
	Literatur zu Kapitel 1 und weitere Literatur	38
<b>2</b>	<b>Interpolation</b>	<b>41</b>
2.1	Interpolation durch Polynome	43
2.1.1	Theoretische Grundlagen. Die Interpolationsformel von Lagrange	43
2.1.2	Der Algorithmus von Neville	44
2.1.3	Die Newtonsche Interpolationsformel. Dividierte Differenzen	48
2.1.4	Das Restglied bei der Polynominterpolation	53
2.1.5	Hermite-Interpolation	56
2.2	Interpolation mit rationalen Funktionen	62
2.2.1	Allgemeine Eigenschaften der rationalen Interpolation	62
2.2.2	Inverse und reziproke Differenzen. Der Thielesche Kettenbruch	67
2.2.3	Neville-artige Algorithmen	71
2.2.4	Anwendungen und Vergleich der beschriebenen Algorithmen	76
2.3	Trigonometrische Interpolation	78
2.3.1	Theoretische Grundlagen	78
2.3.2	Algorithmen zur schnellen Fouriertransformation	84
2.3.3	Die Algorithmen von Goertzel und Reinsch	91

2.3.4	Die näherungsweise Berechnung von Fourierkoeffizienten. Abminderungsfaktoren . . .	95
2.4	Spline-Interpolation . . . . .	101
2.4.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	101
2.4.2	Die Berechnung von kubischen Splinefunktionen . .	105
2.4.3	Konvergenzeigenschaften kubischer Splinefunktionen	111
2.4.4	B-Splines . . . . .	116
2.4.5	Die Berechnung von B-Splines . . . . .	120
	Übungsaufgaben zu Kapitel 2- . . . . .	125
	Literatur zu Kapitel 2 . . . . .	134
<b>3</b>	<b>Integration von Funktionen . . . . .</b>	<b>137</b>
3.1	Elementare Integrationsformeln. Fehlerabschätzungen	138
3.2	Die Peanosche Fehlerdarstellung . . . . .	144
3.3	Die Euler-Maclaurinsche Summenformel . . . . .	148
3.4	Anwendung der Extrapolation auf die Integration .	152
3.5	Allgemeines über Extrapolationsverfahren . . . . .	157
3.6	Die Gaußsche Integrationsmethode . . . . .	163
3.7	Integrale mit Singularitäten . . . . .	173
	Übungsaufgaben zu Kapitel 3 . . . . .	176
	Literatur zu Kapitel 3 . . . . .	179
<b>4</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme . . . . .</b>	<b>181</b>
4.1	Gauß-Elimination. Dreieckszerlegung einer Matrix .	182
4.2	Der Gauß-Jordan-Algorithmus . . . . .	192
4.3	Das Cholesky-Verfahren . . . . .	196
4.4	Fehlerabschätzungen . . . . .	200
4.5	Rundungsfehleranalyse der Gaußschen Eliminationsmethode . . . . .	208
4.6	Rundungsfehlereinfluß bei der Auflösung von gestaffelten Gleichungssystemen . . . . .	214
4.7	Orthogonalisierungsverfahren. Die Verfahren von Householder und Schmidt . . . .	216
4.8	Ausgleichsrechnung . . . . .	224
4.8.1	Das lineare Ausgleichsproblem. Die Normalgleichungen . . . . .	226
4.8.2	Orthogonalisierungsverfahren zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems . . . . .	228
4.8.3	Die Kondition des linearen Ausgleichsproblems . .	230
4.8.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme . . . . .	236
4.8.5	Die Pseudoinverse einer Matrix . . . . .	238

4.9	Modifikationstechniken . . . . .	241
4.10	Lineare Minimierungsprobleme. Die Simplexmethode	250
4.11	Phase I der Simplexmethode . . . . .	264
4.12	Exkurs: Eliminationsverfahren für dünn besetzte Matrizen . . . . .	267
	Übungsaufgaben zu Kapitel 4 . . . . .	276
	Literatur zu Kapitel 4 . . . . .	281
<b>5</b>	<b>Verfahren zur Nullstellenbestimmung.</b>	
	<b>Minimierungsmethoden . . . . .</b>	<b>285</b>
5.1	Entwicklung von Iterationsverfahren . . . . .	286
5.2	Allgemeine Konvergenzsätze . . . . .	289
5.3	Die Konvergenz des allgemeinen Newton-Verfahrens	294
5.4	Ein modifiziertes Newton-Verfahren . . . . .	298
5.4.1	Über die Konvergenz von Minimierungsverfahren .	299
5.4.2	Anwendung auf das modifizierte Newton-Verfahren	305
5.4.3	Hinweise zur praktischen Realisierung des modifizierten Newton-Verfahrens. Ein Rang-1-Verfahren von Broyden . . . . .	309
5.5	Nullstellenbestimmung für Polynome. Das Newtonsche Verfahren . . . . .	313
5.6	Sturmsche Ketten und Bisektionsverfahren . . . . .	325
5.7	Das Verfahren von Bairstow . . . . .	330
5.8	Die Empfindlichkeit der Nullstellen von Polynomen	333
5.9	Interpolationsmethoden zur Bestimmung von Nullstellen . . . . .	336
5.10	Die $\Delta^2$ -Methode von Aitken . . . . .	342
5.11	Minimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen . .	346
	Übungsaufgaben zu Kapitel 5 . . . . .	356
	Literatur zu Kapitel 5 . . . . .	359
	<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>362</b>