

AL  
Horst Rinne

14.80  
2/09

# Statistische Formelsammlung

begründet von G. Creutz/R. Ehlers

Fachbereich Mathematik  
Technische Hochschule Darmstadt  
Bibliothek

Inv.-Nr. B 196216

1982

Verlag Harri Deutsch  
Thun und Frankfurt/Main

FB Mathematik  
TU Darmstadt



58359459

# INHALTSVERZEICHNIS

## DESKRIPTIVE STATISTIK

1.	Grundlegende Konzepte .....	1
1.1.	Statistische Massen und statistische Einheiten .....	1
1.2.	Skalen und statistische Merkmale .....	1
1.3.	Phasen einer statistischen Untersuchung .....	4
2.	Eindimensionale Häufigkeitsverteilungen nominaler, ordinaler und diskreter Merkmale .....	6
2.1.	Häufigkeitsfunktionen .....	6
2.1.1.	Nominalmerkmal (nicht-häufbar) .....	6
2.1.2.	Ordinalmerkmal und diskretes Merkmal .....	8
2.2.	Empirische Verteilungsfunktion .....	9
2.3.	Perzentile .....	10
3.	Eindimensionale Häufigkeitsverteilungen stetiger Merkmale .....	10
3.1.	Häufigkeitsfunktion und Häufigkeitsdichte .....	11
3.2.	Empirische Verteilungsfunktion .....	12
3.3.	Bestimmung von Anteilswerten .....	12
3.4.	Bestimmung von Perzentilen .....	13
4.	Maßzahlen für eindimensionale Häufigkeitsver- teilungen .....	13
4.1.	Lageparameter .....	13
4.1.1.	Modus .....	14
4.1.2.	Perzentile, insbesondere der Median .....	14
4.1.3.	Bereichsmittle .....	15
4.1.4.	Schwerster Wert .....	15
4.1.5.	Arithmetisches Mittel .....	15
4.1.6.	Geometrisches Mittel .....	16
4.1.7.	Harmonisches Mittel .....	17
4.1.8.	Größenbeziehung zwischen Lageparametern .....	17

4.2.	Streuungsparameter .....	18
4.2.1.	Spannweite .....	18
4.2.2.	Perzentilsabstände .....	18
4.2.3.	Mittlere absolute Abweichungen .....	19
4.2.4.	Mittlere quadratische Abweichung, Varianz, Standard- abweichung, Variationskoeffizient .....	19
4.3.	Empirische Momente .....	21
4.3.1.	Nullmomente .....	21
4.3.2.	Zentrale Momente .....	22
4.3.3.	Beziehung zwischen Momenten .....	22
4.4.	Schiefemaße .....	22
4.5.	Wölbungsmaße .....	23
4.6.	Konzentrationsmaße .....	24
4.6.1.	Maße der absoluten Konzentration .....	24
4.6.2.	Maße der relativen Konzentration .....	25
5.	Zweidimensionale Häufigkeitsverteilungen .....	26
5.1.	Vorbemerkungen .....	26
5.1.1.	Gemeinsame Häufigkeiten .....	26
5.1.2.	Randverteilungen und deren Parameter .....	27
5.1.3.	Bedingte Verteilungen und deren Parameter .....	29
5.1.4.	Statistische Unabhängigkeit .....	30
5.2.	Maße des Zusammenhangs zweier Merkmale .....	31
5.2.1.	Assoziationsmaße .....	31
5.2.2.	Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman .....	32
5.2.3.	Korrelationskoeffizient nach Bravais und Pearson ....	33
5.3.	Regressionsbeziehungen zweier Variablen .....	34
5.3.1.	Empirische Regression erster Art .....	34
5.3.2.	Empirische lineare Einfachregression .....	35
5.3.3.	Einige nicht-lineare Regressionsansätze mit zwei Variablen .....	38
5.4.	Empirische lineare Zweifachregression .....	38
6.	Verhältniszahlen .....	42
6.1.	Gliederungszahlen .....	42
6.2.	Beziehungszahlen .....	43

6.3.	Meßzahlen .....	43
6.4.	Indexzahlen .....	45
6.4.1.	Preisindizes .....	45
6.4.2.	Mengen- oder Volumenindizes .....	46
6.4.3.	Wertindex .....	47
6.4.4.	Deflationierung .....	47
6.4.5.	Zusammenhang zwischen Indizes .....	48
7.	Analyse von Bestands- und Ereignismassen .....	48
7.1.	Fortschreibungsmodelle .....	48
7.2.	Abgangsmodelle, insbesondere Sterbetafel .....	50
8.	Elementare Zeitreihenanalyse .....	51
8.1.	Zeitreihenkomponenten und ihre Verknüpfung .....	52
8.2.	Globalschätzung .....	53
8.3.	Lokalschätzung .....	54
8.3.1.	Gleitende Durchschnitte .....	54
8.3.2.	Zeitreihenzerlegung mittels gleitender Durchschnitte bei konstanter Saisonfigur .....	55

#### WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

9.	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	58
9.1.	Einführung in die Kombinatorik .....	58
9.1.1.	Permutationen .....	58
9.1.2.	Variationen .....	59
9.1.3.	Kombinationen und Binomialkoeffizienten .....	59
9.2.	Ereignisalgebra .....	60
9.2.1.	Definitionen .....	60
9.2.2.	Operationen mit Ereignissen .....	61
9.2.3.	Beziehungen zwischen Ereignissen .....	62
9.3.	Wahrscheinlichkeitsinterpretationen und die Axiomatik von Kolmogoroff .....	62
9.4.	Bedingte Wahrscheinlichkeiten .....	63
9.5.	Stochastische Unabhängigkeit .....	64

9.6.	Einige Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	64
10.	Zufallsvariable und deren Verteilung .....	66
10.1.	Eindimensionale diskrete Zufallsvariable .....	66
10.2.	Eindimensionale stetige Zufallsvariable .....	67
10.3.	Beschreibung eindimensionaler Verteilungen .....	68
10.3.1.	Perzentile .....	68
10.3.2.	Erwartungswerte .....	69
10.3.3.	Varianz und Standardabweichung .....	69
10.3.4.	Momente .....	70
10.3.5.	Schiefe- und Wölbungsmaße .....	72
10.4.	Zweidimensionale Zufallsvariable .....	73
10.4.1.	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion .....	73
10.4.2.	Zweidimensionale Dichte .....	73
10.4.3.	Zweidimensionale Verteilungsfunktion .....	74
10.4.4.	Randverteilungen und deren Parameter .....	74
10.4.5.	Bedingte Verteilungen und deren Parameter .....	76
10.4.6.	Stochastische Unabhängigkeit .....	78
10.4.7.	Momente einer zweidimensionalen Zufallsvariablen ....	79
10.5.	Mehrdimensionale Zufallsvariable .....	80
11.	Einige Verteilungen diskreter Zufallsvariablen .....	80
11.1.	Bernoulli-Verteilung oder Null-Eins-Verteilung: Be(P) .....	81
11.2.	Binomialverteilung: $Bi(n;P)$ .....	82
11.3.	Gleichverteilung: $Gl(a;b;L)$ .....	83
11.4.	Hypergeometrische Verteilung: $Hy(n;N;M)$ .....	84
11.5.	Multinomialverteilung: $Mu(n;P_1;P_2;...;P_m)$ .....	85
11.6.	Negative Binomialverteilung: $Nb(c;P)$ .....	86
11.7.	Poisson-Verteilung: $Po(\lambda)$ .....	87
12.	Einige Verteilungen stetiger Zufallsvariablen .....	88
12.1.	Beta-Verteilung: $Bt(c;d)$ .....	88
12.2.	Cauchy-Verteilung: $Ca(a;b)$ .....	89
12.3.	Exponentialverteilung: $Ex(\lambda)$ .....	90
12.4.	Gamma- und Erlang-Verteilung: $Ga(b;c)$ .....	91

12.5.	Lognormalverteilung: $\text{Ln}(a;b)$ .....	92
12.6.	Normalverteilungen .....	93
12.6.1.	Eindimensionale Normalverteilung: $\text{No}(\mu;\sigma^2)$ .....	93
12.6.2.	Zweidimensionale Normalverteilung: $\text{Zn}(\mu_X;\mu_Y;\sigma_X^2;\sigma_Y^2;\rho)$ .....	94
12.7.	Pareto-Verteilung: $\text{Pa}(b;c)$ .....	95
12.8.	Potenzverteilung: $\text{Pt}(b;c)$ .....	96
12.9.	Rechtecksverteilung: $\text{Re}(a;b)$ .....	97
12.10.	Weibull-Verteilung: $\text{We}(b;c)$ .....	98
13.	Gesetze der großen Zahlen und zentrale Grenzwert- sätze .....	99
13.1.	Zentrale Grenzwertsätze .....	99
13.2.	Gesetze der großen Zahlen .....	100
14.	Stichprobenverteilungen .....	102
14.1.	Stichprobenvektor und Stichprobenfunktion .....	102
14.2.	Grenzverteilungen von Stichprobenfunktionen .....	102
14.3.	Verteilungen von Stichprobenfunktionen bei Stichproben aus normalverteilten Gesamtheiten .....	103
14.3.1.	t-Verteilung (Student-Verteilung): $t(\nu)$ .....	103
14.3.2.	$\chi^2$ -Verteilung: $\chi^2(\nu)$ .....	105
14.3.3.	F-Verteilung (Fisher-Verteilung): $F(\nu_1;\nu_2)$ .....	106

## SCHÄTZTHEORIE

15.	Punktschätzung .....	109
15.1.	Eigenschaften von Schätzfunktionen .....	109
15.1.1.	Erwartungstreue .....	109
15.1.2.	Mediantreue .....	110
15.1.3.	Konsistenz .....	110
15.1.4.	Effizienz .....	111
15.1.5.	Suffizienz .....	111
15.1.6.	BLU- und BAN-Schätzer .....	111
15.2.	Konstruktionsprinzipien für Schätzfunktionen .....	112

15.2.1.	Momentenmethode .....	112
15.2.2.	Maximum-Likelihood-Methode .....	113
15.2.3.	Kleinst-Quadrate-Methode .....	114
15.2.4.	$\chi^2$ -Minimum-Methode .....	114
15.2.5.	Methode der Quantile .....	114
15.3.	Zusammenstellung einiger Schätzfunktionen .....	115
16.	Intervallschätzung .....	116
16.1.	Schwankungs- oder Prognoseintervalle .....	116
16.2.	Konfidenzintervalle .....	116
16.2.1.	Interpretation und Konstruktion .....	116
16.2.2.	Konfidenzintervalle für $\mu$ und $\sigma^2$ einer Normal- verteilung .....	118
16.2.3.	Konfidenzintervalle für P einer Binomial- und einer hypergeometrischen Verteilung .....	120
16.2.4.	Konfidenzintervalle für $\lambda$ einer Poisson-Verteilung ..	121
16.3.	Bestimmung des Stichprobenumfangs .....	121

## TESTTHEORIE

17.	Grundbegriffe der Testtheorie .....	124
17.1.	Statistische Hypothesen und statistische Tests .....	124
17.2.	Kritischer Bereich und Annahmehereich .....	125
17.3.	Fehler erster und zweiter Art .....	125
17.4.	Gütefunktion und Operationscharakteristik .....	126
17.5.	Obersicht über die Entscheidungsalternativen eines Tests .....	127
18.	Parametertests .....	128
18.1.	Typen von Parametertests .....	128
18.2.	Parametertests bei normalverteilten Gesamtheiten ....	128
18.2.1.	Hypothesen über $\mu$ bei bekanntem $\sigma^2$ .....	128
18.2.2.	Hypothesen über $\mu$ bei unbekanntem $\sigma^2$ .....	130
18.2.3.	Hypothesen über die Differenz $\mu_1 - \mu_2$ .....	131
18.2.4.	Vergleich mehrerer Erwartungswerte .....	133

18.2.5.	Hypothesen über $\sigma^2$ .....	134
18.2.6.	Hypothesen über zwei Varianzen $\sigma_1^2$ und $\sigma_2^2$ .....	135
18.2.7.	Vergleich mehrerer Varianzen .....	136
18.2.8.	Hypothesen über $\rho$ .....	137
18.3.	Hypothesen über $\mu$ einer beliebigen Verteilung .....	138
18.4.	Hypothesen über P .....	138
18.5.	Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten $P_1$ und $P_2$ .....	139
19.	Anpassungs-, Homogenitäts- und Unabhängigkeitstests .	139
19.1.	Anpassungstests .....	139
19.1.1.	$\chi^2$ -Anpassungstest .....	140
19.1.2.	Kolmogoroff-Smirnoff-Anpassungstest .....	141
19.2.	Homogenitätstests .....	142
19.2.1.	$\chi^2$ -Homogenitätstest .....	142
19.2.2.	Kolmogoroff-Smirnoff-Homogenitätstest .....	143
19.3.	Unabhängigkeitstest .....	144

#### SCHÄTZ- UND TESTVERFAHREN IM LINEAREN REGRESSIONSMODELL

20.	Das Modell der linearen Einfachregression .....	145
20.1.	Die Annahmen des klassischen Regressionsmodells .....	145
20.2.	Schätzfunktionen für die Modellparameter und deren Eigenschaften .....	147
20.3.	Prüfung der Modellannahmen .....	149
20.3.1.	Test auf Linearität .....	149
20.3.2.	Test auf Autokorrelationsfreiheit .....	149
20.3.3.	Test auf Homoskedastizität .....	150
20.3.4.	Test auf Strukturkonstanz .....	151
20.4.	Inferenzaussagen über die Modellparameter .....	152
20.4.1.	Aussagen über $\beta_0$ .....	152
20.4.2.	Aussagen über $\beta_1$ .....	152
20.4.3.	Aussagen über $\beta_0$ und $\beta_1$ .....	153
20.4.4.	Aussagen über $\sigma_0^2$ .....	153
20.5.	Prognosen .....	154



20.5.1.	Punkt- und Intervallprognosen für den bedingten Erwartungswert .....	154
20.5.2.	Intervallprognosen für den Individualwert .....	154
21.	Das multiple lineare Regressionsmodell .....	155

ANHANG

A.	MATHEMATISCHE ZEICHEN .....	156
A.1.	Beziehungszeichen .....	156
A.2.	Zeichen der Algebra .....	157
A.3.	Zeichen der Trigonometrie .....	157
A.4.	Zeichen der Analysis .....	158
A.5.	Zahlenmengen .....	159
A.6.	Zeichen der Mengenalgebra .....	159
A.7.	Symbole der Logik .....	160
A.8.	Griechisches Alphabet .....	160
A.9.	Bezeichnung von Konstanten .....	161
B.	TABELLEN	
B.1.	Fakultäten .....	162
B.2.	Binomialkoeffizienten .....	163
B.3.	Standardnormalverteilung (Verteilungsfunktion) .....	164
B.4.	$\chi^2$ -Verteilung (Perzentile) .....	166
B.5.	t-Verteilung (Perzentile) .....	167
B.6.	F-Verteilung (Perzentile) .....	168
B.7.	Schwellenwerte für den Kolmogoroff-Smirnoff-Test ....	170
B.8.	Schwellenwerte für den Durbin-Watson-Test .....	171
B.9.	Digitale Zufallsziffern .....	172
B.10.	In [0;1] gleichverteilte Zufallszahlen .....	173
	LITERATUR .....	174

ABBILDUNGEN

1a	Stabdiagramm .....	7
1b	Rechteckdiagramm .....	7
1c	Kreisdiagramm .....	7
2	Stabdiagramm .....	8
3	Treppenfunktion .....	9
4	Histogramm .....	11
5	Polygonzug .....	12
6a	Symmetrische Verteilung .....	23
6b	Linkssteile Verteilung .....	23
6c	Rechtssteile Verteilung .....	23
7	Diagramm mit Lorenzkurve .....	25
8a	Dichte .....	68
8b	Verteilungsfunktion .....	68
9a	Zweiseitiges Prognose- und Konfidenzintervall .....	117
9b	Oben begrenztes Prognoseintervall; unten begrenztes Konfidenzintervall .....	118
9c	Unten begrenztes Prognoseintervall; oben begrenztes Konfidenzintervall .....	118

TABELLEN IM TEXT

1	Obersicht über die gebräuchlichen Skalen- und Merkmals- typen .....	3
2	Tabelle der gemeinsamen absoluten Häufigkeiten .....	27
3	Typisierung der Verhältniszahlen .....	42
4	Operationen mit Ereignissen .....	61
5	Einige Schätzfunktionen und deren Eigenschaften .....	115
6	Formeln für den notwendigen Stichprobenumfang .....	123
7	Entscheidungsalternativen und deren Wahrrscheinlich- keiten bei einem Parametertest .....	127
8	Häufigkeitstabelle beim Homogenitätstest .....	142