

---

Peter Steinke

# Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

5., bearbeitete und ergänzte Auflage

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM .....	3
1.2	Verschiedene Elementtypen .....	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode .....	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen .....	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung.....	11
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	
2.1	Schreibweisen .....	19
2.2	Vektoren .....	20
2.2.1	Definition eines $n$ dimensionalen Vektors .....	20
2.2.2	Skalarprodukt.....	20
2.2.3	Kreuzprodukt .....	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren .....	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor .....	22
2.2.6	Der Gradientenvektor .....	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator.....	23
2.3	Matrizen .....	23
2.3.1	Definition einer Matrix.....	23
2.3.2	Rechenregeln.....	24
2.3.3	Transponierte Matrix.....	26
2.3.4	Orthogonale Matrix .....	26
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe) .....	27
2.4.1	Differentialoperator .....	27
2.4.2	Tensor höherer Stufe .....	28
2.5	Felder .....	28
2.5.1	Skalarfelder .....	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes .....	28
2.5.3	Das dyadische Feld .....	29
2.6	Lineare Transformation .....	31
2.6.1	Transformation eines Vektors.....	31
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe).....	33
2.6.3	Beispiele zur Transformation .....	34
2.7	Funktionale.....	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktionals .....	37
2.8	Dreieckskoordinaten .....	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix) .....	40
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten .....	43
2.9	Numerische Integration (Quadratur).....	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

2.9.2	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten.....	46
2.10	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM .....	47
2.10.1	Definition der Bandbreite .....	48
2.10.2	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme .....	49
2.10.3	Positiv definite Matrix .....	50
2.10.4	Das Verfahren von Cholesky .....	51
2.10.5	Kondition linearer Gleichungssysteme .....	53
2.10.6	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen ....	55
2.11	Näherungsfehler bei der FEM .....	57
2.12	Das Tonti-Diagramm.....	58
<b>3</b>	<b>Beschreibung elastostatischer Probleme</b>	
3.1	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.....	61
3.1.1	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	61
3.1.2	Das Stoffgesetz.....	62
3.1.3	Gleichgewichtsbedingungen .....	62
3.1.4	Randbedingungen .....	62
3.1.5	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems.....	63
3.1.6	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik.....	64
3.2	Das Prinzip virtueller Verrückungen.....	65
3.2.1	Das Prinzip vom Gesamtpotential.....	65
<b>4</b>	<b>Das Verfahren von Ritz</b>	
4.1	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen.....	72
4.1.1	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen.....	73
4.2	Eindimensionale Stabprobleme .....	75
4.2.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	75
4.2.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	76
4.2.3	Beispiel zum eindimensionalen Stab .....	77
4.3	Eindimensionale Balkenprobleme .....	79
4.3.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	79
4.3.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	79
4.3.3	Variation des Gesamtpotentials .....	80
4.4	Scheibenproblem .....	84
4.4.1	Verschiebungsansätze .....	85
4.4.2	Wesentliche Randbedingungen .....	85
4.4.3	Dehnungen und Spannungen der Scheibe.....	86
4.4.4	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	87
4.4.5	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	88
4.4.6	Variation des Gesamtpotentials .....	89
4.4.7	Kragbalken als Scheibenproblem.....	89

<b>5</b>	<b>Stabelemente</b>	
5.1	Das eindimensionale Stabelement .....	95
5.1.1	Problemdefinition .....	95
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes .....	95
5.1.3	Das Funktional des Stabproblems .....	98
5.1.4	Diskretisierung des Funktionals des Stabes .....	98
5.1.5	Variation des Funktionals .....	101
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab.....	103
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix .....	109
5.1.8	Allgemeine Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix .....	112
5.1.9	Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab .....	116
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes .....	118
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit $n$ Knoten .....	119
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten .....	121
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement .....	122
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement .....	122
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem .....	126
5.2.3	Optimierung eines Stabtragwerkes.....	130
5.2.4	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab.....	133
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement .....	136
<b>6</b>	<b>Balkenelemente</b>	
6.1	Das eindimensionale Balkenelement.....	141
6.1.1	Problemdefinition .....	141
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken .....	142
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens .....	143
6.1.4	Funktional des Balkenproblems .....	144
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens .....	145
6.1.6	Diskretisierung des Funktionals .....	147
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktionals .....	149
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix .....	150
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast.....	151
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes .....	153
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken .....	155
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast .....	155
6.2.2	Konvergenztest zum zweiknotigen Balkenelement.....	159
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung...	161
6.3	Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken.....	163
6.4	Balkenelement mit $n$ Knoten und $p$ Freiheitsgraden pro Knoten .....	166
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten .....	169

6.5	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten .....	173
6.5.1	Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung .....	176
6.6	Der Timoshenko-Balken .....	177
6.6.1	Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken .....	183
6.6.2	„Locking-Effect“ .....	184
6.6.3	Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken.....	186
6.7	Der elastisch gelagerte Balken .....	187
6.7.1	Beispiel zum elastisch gelagerten Balken.....	189
6.8	Zweidimensionales Balkenelement .....	194
6.8.1	Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens .....	194
6.8.2	Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken .....	194
6.8.3	Steifigkeitsmatrix .....	195
6.8.4	Transformation der Steifigkeitsmatrix.....	197
6.9	Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken .....	200
6.9.1	Winkelproblem.....	200
6.9.2	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken .....	206
7	<b>Scheibenproblem</b>	
7.1	Problemdefinition .....	211
7.2	Die Grundgleichungen des Scheibenproblems .....	212
7.2.1	Die Feldgleichungen der Scheibe .....	213
7.3	Das Funktional des Scheibenproblems.....	214
7.3.1	Diskretisierung des Funktionals .....	215
7.3.2	Variation des diskretisierten Funktionals .....	219
7.3.3	Diskretisierung der Volumenkräfte.....	221
7.3.4	Diskretisierung der Streckenlasten .....	224
7.3.5	Spannungen in der Scheibe .....	227
7.3.6	Beispiel zum Scheibenproblem .....	227
7.4	Übungsbeispiele zur Scheibe .....	233
7.5	Isoparametrisches Scheibenelement .....	236
7.5.1	Isoparametrische Viereckselemente .....	236
7.5.2	Das vierknotige Viereckselement.....	237
7.5.3	Beispiel zu möglichen Formen des Viereckselementes ....	242
7.5.4	Numerische Integration mittels Gauß-Quadratur .....	247
7.5.5	Diskretisierung der Volumenkräfte.....	250
7.5.6	Diskretisierung der Streckenlast.....	254
7.5.7	Berechnung der Spannungen .....	255
7.5.8	Lokale Glättung der Spannungen .....	255
7.5.9	Beispiel zur lokalen Spannungsglättung .....	257

7.5.10	Vergleich der Verformungen von Dreiecks- und Viereckselement .....	258
<b>8</b>	<b>Platten- und Schalenelemente</b>	
8.1	Problemdefinition .....	263
8.2	Grundbeziehungen der Platte .....	263
8.2.1	Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte .....	263
8.2.2	Kinematische Größen der Platte .....	265
8.2.3	Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung) .....	266
8.2.4	Gleichgewichtsbeziehungen der Platte .....	268
8.2.5	Randbedingungen der Platte .....	268
8.3	Das Funktional der Platte .....	269
8.4	Anforderungen an das Plattenelement .....	271
8.4.1	Kompatibilität (konforme Elemente) .....	271
8.4.2	Starrkörperbewegung .....	272
8.4.3	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand) .....	273
8.4.4	Einige Dreiecksplattenelemente .....	273
8.5	Diskretisierung des Funktionals .....	275
8.5.1	Ansatzfunktion für die Durchbiegung .....	275
8.5.2	Interpolationsbedingungen .....	276
8.5.3	Formfunktionen .....	279
8.5.4	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung .....	280
8.5.5	Steifigkeitsmatrix .....	280
8.5.6	Flächenlast .....	282
8.5.7	Streckenlast entlang einer Elementkante .....	282
8.6	Konvergenztest des Plattenelementes .....	284
8.6.1	Vergleich der Platten nach DKT und Specht .....	285
8.7	Schalenelement .....	286
8.7.1	Konvergenztest für verschiedene Schalenelementtypen ...	292
<b>9</b>	<b>Räumlicher Spannungszustand</b>	
9.1	Problemdefinition .....	297
9.2	Die Grundgleichungen des räumlichen Problems .....	297
9.2.1	Die Feldgleichungen des räumlichen Problems .....	298
9.3	Das Funktional des räumlichen Problems .....	300
9.4	Das vierknotige Tetraederelement .....	301
9.4.1	Volumenkoordinaten .....	301
9.4.2	Das vierknotige Tetraederelement in globalen Koordinaten	302
9.5	Diskretisierung des Funktionals .....	302
9.5.1	Formfunktionen des vierknotigen Tetraederelementes ...	302
9.5.2	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung .....	304
9.5.3	Spannungs-Verschiebungs-Beziehung .....	307

9.5.4	Variation des diskretisierten Funktionals .....	308
9.5.5	Steifigkeitsmatrix des vierknotigen Tetraederelementes ..	308
9.5.6	Spannungen im vierknotigen Tetraederelement .....	312
9.5.7	Flächenlast beim vierknotigen Tetraederelement .....	312
9.5.8	Volumenkräfte beim vierknotigen Tetraederelement .....	314
9.5.9	Konvergenztest in den Verformungen .....	315
9.5.10	Konvergenztest in den Spannungen .....	316
9.5.11	Beispiel zu einem räumlichen Spannungsproblem.....	317
<b>10</b>	<b>Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben, Balken, Scheiben und Platten</b>	
10.1	Das Prinzip von Hamilton .....	321
10.1.1	Diskretisierung des Wirkungsfunktionalis .....	321
10.1.2	Eigenwerte und Eigenfrequenzen.....	323
10.1.3	Eigenvektoren und Schwingungsformen .....	324
10.2	Massenmatrix des eindimensionalen Stabes.....	324
10.3	Beispiele zum eindimensionalen Stab .....	325
10.3.1	Einmassenschwinger .....	325
10.3.2	Zweimassenschwinger .....	326
10.3.3	Übungsbeispiel zur Stabschwingung.....	329
10.4	Massenmatrix des zweidimensionalen Stabes.....	329
10.4.1	Beispiel zum zweidimensionalen Stab .....	330
10.5	Der eindimensionale, zweiknotige Balken .....	333
10.5.1	Der eindimensionale Balken mit Längsverschiebung .....	333
10.5.2	Der eindimensionale Balken ohne Längsverschiebung.....	334
10.5.3	Beispiele zum eindimensionalen Balken.....	334
10.5.4	Beidseitig gelenkig gelagerter Balken .....	335
10.5.5	Kragbalken .....	337
10.5.6	Übungsbeispiel zur Balkenschwingung .....	340
10.6	Massenmatrix des zweidimensionalen Balkens.....	340
10.6.1	Beispiel zum 2D-Balken .....	341
10.7	Massenmatrix des dreiknotigen Scheibenelementes .....	344
10.7.1	Beispiel zur Eigenfrequenz einer Scheibe.....	344
10.8	Massenmatrix der Platte nach Specht .....	347
<b>11</b>	<b>Knicken von Stäben und Balken</b>	
11.1	Green-Lagrange Dehnungstensor.....	353
11.2	Formänderungsarbeit des Stabes.....	354
11.3	Dehnungen und Formänderungsarbeit des Balkens.....	355
11.4	Das zweiknotige Stabelement .....	356
11.5	Das zweiknotige Balkenelement .....	358
11.6	Das Knicken als Eigenwertproblem .....	361

11.6.1	Beispiel zum Knicken von Stäben .....	363
11.6.2	Knickbeispiel I (Stab) .....	367
11.6.3	Beispiel zum Knicken von Balken .....	368
11.6.4	Die vier Eulerfälle .....	370
11.6.5	Knickbeispiel II (Balken) .....	371
11.6.6	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement) .....	371
<b>12</b>	<b>Feldprobleme</b>	
12.1	Wärmeübertragung .....	377
12.1.1	Die Poisson'sche Gleichung .....	377
12.1.2	Randbedingungen .....	377
12.1.3	Das Funktional der Wärmeübertragung .....	378
12.2	Eindimensionale Wärmeübertragung .....	379
12.2.1	Problemdefinition .....	379
12.2.2	Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems .....	380
12.2.3	Diskretisierung des Funktionals .....	380
12.2.4	Variation des Funktionals .....	384
12.2.5	Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung .....	384
12.2.6	Übungsbeispiele zur eindimensionalen Wärmeübertragung .....	389
12.3	Zweidimensionale Wärmeübertragung .....	392
12.3.1	Problemdefinition .....	392
12.3.2	Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung .....	392
12.3.3	Diskretisierung des Funktionals .....	393
12.3.4	Variation des Funktionals .....	400
12.3.5	Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung .....	402
12.3.6	Übungsbeispiele zur zweidimensionalen Wärmeübertragung .....	407
12.4	Torsion von prismatischen Körpern .....	411
12.4.1	Funktional des Torsionsproblems .....	414
12.5	Analogie zwischen Wärmeübertragung und Schichtenströmung .....	417
12.5.1	Problembeschreibung .....	417
12.5.2	Grundgleichungen der Schichtenströmung .....	417
12.5.3	Analogie der Randbedingungen .....	419
12.5.4	Analoges Funktional des Strömungsproblems .....	420
<b>13</b>	<b>CALL_for_FEM</b>	
13.1	Übersicht über CALL_for_FEM .....	425
13.1.1	Erstinstallation von CALL_for_FEM auf dem Rechner .....	426
13.1.2	Installation einer neuen Version von CALL_for_FEM .....	426
13.1.3	Lösungen zu den Übungsbeispielen .....	427



13.1.4	Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons .....	427
13.1.5	Video-Tutorials als Lernmittel .....	428
13.2	Numerische Programme .....	429
13.3	Symbolische Programme .....	430
13.3.1	Symbolische Programme in Maple und Python .....	430
13.3.2	Symbolische Programme in Maple realisiert .....	432
13.4	Ausführliche Programmbeschreibungen .....	433
13.4.1	Das Programm InterFEM .....	433
13.4.2	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab) .....	434
13.4.3	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken) ....	436
13.4.4	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	438
13.4.5	Eindimensionales Stabelement (Stab_1D) .....	440
13.4.6	Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D) .....	442
13.4.7	Timoshenko-Balken (Timoshenko_1D) .....	443
13.4.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck) .....	444
13.4.9	Plattenelement (Platte) .....	445
13.4.10	Knicken des eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken)	445
13.4.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dy- namik_Balken) .....	447
13.4.12	Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D) .....	448
13.4.13	Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_2D) .....	449
<b>14</b>	<b>Beispiele zu den Programmen</b>	
14.1	Elastisch gelagerter Balken .....	453
14.2	Scheibe gestützt durch eine Feder .....	454
14.3	Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Drei- ecks (Quadrates) .....	456
	<b>Verwendete Formelzeichen und Symbole</b> .....	461
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	473
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	477
	<b>Programme</b> .....	485