Giancarlo Gandolfo

Economic Dynamics

Third, Completely Revised and Enlarged Edition

With 65 Figures and 6 Tables



Contents

ŕ

۰.

١

١

	PRE	EFACE	/11
1	Intr	oduction	1
~	1.1	Definition	1
	12	Functional equations	2
	13	References	3
	1.0		Ŭ
I	. LI	NEAR DIFFERENCE EQUATIONS	5
2	Diff	erence Equations: General Principles	7
	2.1	Definitions	7
	2.2	Linear difference equations with constant coefficients	9
		2.2.1 The homogeneous equation	10
		2.2.2 The non-homogeneous equation	12
	2.3	Determination of the arbitrary constants	13
	2.4	References	14
3	Firs	st-order Difference Equations	17
	3.1	Solution of the homogeneous equation	17
	3.2	Particular solution of the non-homogeneous equation	21
		3.2.1 $g(t)$ is a constant $\ldots \ldots \ldots$	21
		3.2.2 $g(t)$ is an exponential function	22
		3.2.3 $g(t)$ is a polynomial function of degree m	23
		3.2.4 $g(t)$ is a trigonometric function of the sine-cosine type.	23
		3.2.5 $g(t)$ is a combination of the previous functions	24
		3.2.6 The case when $g(t)$ is a generic function of time. Back-	
		ward and forward solutions	24
	3.3	General solution of the non-homogeneous equation	27
	3.4	A digression on distributed lags and partial adjustment equa-	
		tions	28
	3.5	Exercises	31
		3.5.1 Example	31
		3.5.2 Other exercises	32
	3.6	References	33

4	Firs	t-order Difference Equations in Economic Models	35
	4.1	The cobweb theorem	35
		4.1.1 The cobweb model and expectations	38
		4.1.1.1 The normal price	39
		4.1.1.2 Adaptive expectations	40
	4.2	The dynamics of multipliers	43
		4.2.1 The basic case	43
		4.2.2 Other multipliers	45
		4.2.2.1 A foreign trade multiplier	46
		4.2.2.2 Taxation	47
	4.3	Exercises	48
	4.4	References	51
5	Sec	and-order Difference Equations	53
J	5 1	Solution of the homogeneous equation	53
	0.1	5.1.1 Positive discriminant $(\Lambda > 0)$	54
		5.1.1 Fostive discriminant $(\Delta \neq 0)$	55
		5.1.2 Non discriminant $(\Delta < 0)$	56
		5.1.6 Stability conditions	58
	59	Solution of the non-homogeneous equation	50
	0.2	5.2.1 The operational method	61
	5 2	Determination of the arbitrary constants	63
	51	Every Every Section of the arbitrary constants	65
	0.4	5.4.1 Example	65
		5.4.2 Other every second seco	68
	55	Bafarances	60
	0.0		00
6	Sec	ond-order Difference Equations in Economic Models	71
	6.1	Multiplier-accelerator interaction: the prototype model	71
		6.1.1 Graphical location of the roots	73
	6.2	Market adjustments and rational expectations	75
	6.3	Exercises	76
	6.4	References	80
7	Hiø	her-order Difference Equations	83
•	7.1	Solution of the homogeneous equation	83
	7.2	Particular solution of the non-homogeneous equation	84
		7.2.1 The operational method	85
	7.3	Determination of the arbitrary constants	87
	7.4	Stability conditions	87
		7.4.1 Necessary and sufficient stability conditions	5.
		(Samuelson's form)	88
		7.4.2 Necessary and sufficient stability conditions	
		(Cohn-Schur form)	89

ţ

٨

.

Conten	ıts			-	XI
,		•		١ .	
7.5	5	Exercises			. 91
		7.5.1 Ex	ample .		. 91
		7.5.2 Ot	her exer	cises	. 92
7.6	5	Reference	3		. 92
8 Hi	igh	er-order	Differe	nce Equations in Economic Models	95
8.1	L	Inventory	cycles .		. 95
8.2	2	Distribute	d lags a	and interaction between the multiplier and	
		the accele	rator		. 98
8.3	3	Exercises			. 100
8.4	1	Reference	3	••••••	. 102
n e:		ltonoour	Sustan	ns of Difference Faustions	102
9 31	111L 1	First ord	aysten av 2v2 a	urtoms in permel form	103
9.1	L		moral co	lution of the homogeneous system: first	. 100
		9.1.1 Ge	athod	iution of the homogeneous system. Inst	103
		012 Ca	meral so	lution of the homogeneous system:	. 100
		5.1.2 OC SBC	ond (or	direct) method	. 106
		9.1	.2.1 U	Inequal real roots	. 106
		9.1	.2.2 E	coual real roots	. 108
		9.1	.2.3 C	Complex roots	. 109
		9.1.3 Pa	rticular	solution. Determination of the arbitrary	
		CO	nstants		. 110
9.5	2	First orde	r n×n sy	ystems in normal form	. 111
		9.2.1 Di	rect mat	trix solution	. 114
		9.2.2 St	ability co	onditions	. 115
		9.2	2.2.1 A	digression on not-wholly-unstable systems	. 118
•		9.2	2.2.2 P	Proof of the stability conditions	. 120
		9.2.3 Pa	rticular	solution	. 121
		9.2	2.3.1 T	The operational method	. 122
		9.2.4 De	etermina	tion of the arbitrary constants	. 125
9.	3	General s	ystems .		. 126
		9.3.1 Fi	rst-order	systems not in normal form	. 126
		9.3.2 Hi	gher-ord	ler systems	127
		9.:	3.2.1 A	In example	. 127
		9.	3.2.2 I	The general case	. 129
		9.	3.2.3 Т	Transformation of a higher-order system into	
			. a	first-order system in normal form	. 130
		9.	3.2.4 S	stability conditions for higher-order systems	. 1,32
9.	4	Exercises		••••••••••••••••••••••••	. 132
		9.4.1 Ex	cample .		. 132
		9.4.2 O	ther exer	rcises	. 133
9.	5	Reference	s	•••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	. 134

10	Sim	ultaneo	ous Difference Systems in Economic Models	137
	10.1	Courne	ot oligopoly	. 137
	10.2	Multip	lier effects in an open economy	. 140
	10.3	Exercis	3es	. 143
	10.4	Referen	nces	. 143
II	L	INEA	R DIFFERENTIAL EQUATIONS	145
11	Diff	erentia	l Equations: General Principles	147
	11.1	Definit	ions	. 147
	11.2	Linear	differential equations with constant coefficients	. 148
		11.2.1	The homogeneous equation	. 149
		11.2.2	The non-homogeneous equation	. 150
	11.3	Detern	nination of the arbitrary constants	. 152
	11.4	Refere	nces	. 154
12	Firs	t-orde	r Differential Equations	155
	12.1	Solutio	on of the homogeneous equation	. 155
	12.2	Partici	lar solution of the non-homogeneous equation	. 158
		12.2.1	q(t) is a constant	. 158
		12.2.2	q(t) is an exponential function	. 159
		12.2.3	q(t) is a polynomial function of degree m	. 159
		12.2.4	q(t) is a trigonometric function of the sine-cosine type	. 160
		12.2.5	q(t) is a combination of the previous functions	. 160
		12.2.6	q(t) is a generic function of time. The method of vari-	
			ation of parameters	. 161
	12.3	Genera	al solution of the non-homogeneous equation	. 162
•	12.4	Contin	uously distributed lags and partial adjustment equation	ns 163
	12.5	Exerci	ses	. 165
		12.5.1	Example	. 165
		12.5.2	Other exercises	. 167
	12.6	Refere	nces	. 167
13	Firs	t-orde	r Differential Equations in Economic Models	169
	13.1	Stabili	ty of supply and demand equilibrium	. 169
	13.2	Theine	eoclassical growth model	. 175
		13.2.1	Existence of a growth equilibrium	. 176
		13.2.2	Stability of growth equilibrium	. 178
		13.2.3	Refinements	. 181
			13.2.3.1 Depreciation and technical progress	. 181
			13.2.3.2 Golden rule	. 183
		13.2.4	Further developments	. 184
•			13.2.4.1 Adjustment time or, how long is the long run	n? 184

.....

ŧ

i

١

1

					1		•			-						
		13	3.2.4.2	β-c	onvei	rgeno	ce, σ	-con	verge	ence	, ar	ıd a	ll t	hai	t.	. 187
		13	3.2.4.3	Enc	loger	ious	grow	/th.								. 189
]	13.3	Exercises														. 189
]	13.4	Reference	xs													. 191
	~											•				
14 3	Seco	nd-ordel	r Diffe	ren	tial .	Equ	atio	ns								193
	14.1	Solution	of the l	nom	ogene	eous	equa	tion	••	•••	•••	•••	•••	•	• •	. 193
		14.1.1 P	OSITIVE	disc	min	ant	(Δ >	> 0)	••	• •	•••	•••	•••	•	•••	. 194
		14.1.2 N		rimi	nant	(Δ	= 0)		• •	••	•••	•••	•••	•	•••	. 195
		14.1.3 IN	egative	aise	-1:4: a	nant	(Δ	< 0)	•••	•••	•••	•••	•••	•	•••	. 190
	140	14.1.4 St	adility	con		ns.	· · ·	•••	•••	•••	•••	· ·	•••	•	• •	. 198
-	14.2	Particula	r soluti	ion c	or rue	e nor	1-101	noge	neou	is eq	qua	lion	•	•	•••	. 199
		14.Z.1 V	ariatioi	1 01	para	mete	rs	• • •	• •	••	• •	•••	• •	•	•••	. 200
	14.3	General s			the n	ion-h	iomo	gene	ous	equ	atio	n.	•••	•	• •	. 202
	14.4	Determin	ation o	n th	e arc	oitrai	ry co	nsta	nts		•••	•••	•••	·	•••	. 203
	14.5	Exercises		•••	•••		•••	• • •	••	• •	••	•••	•••	•	• •	. 203
		14.5.1 E	xample	s.	•••		•••	•••	•••	• •	• •	•••	••	•	•••	. 203
		14.5.2 O	ther ex	ercis	ses .	•••	•••	• • •	•••	••	•••	•••	•••	•	• •	. 205
	14.6	Reference	es	••	•••	•••	•••	•••	•••		•••	•••	•••	•	• •	. 205
15	Seco	nd-orde	r Diffe	eren	tial 1	Eau	atio	ns iı	n Ec	on	omi	ic N	Лос	del	S	207
	15.1	The seco	nd-orde	er ac	celer	ator										207
		110 00001														
	15.2	Exercises												:		. 210
	15.2 15.3	Exercises	 es		•••	· · ·	· · ·	· · ·	•••	•••	· ·	· · ·	 		•••	. 210
	15.2 15.3	Exercises Reference			· · ·		 	•••	•••	•••	•••	· ·	 		•••	. 210 . 210 . 212
16	15.2 15.3 Higl	Exercises Reference	 s Diffe	ren	 	 Equ	atio	 ns	•••		•••	 	 	•		210 210 212 213
16	15.2 15.3 Hig 16.1	Exercises Reference ner-order Solution	Diffe	rent	ial]	Equa	ation equa	ns ation	•••	· · ·	· · ·	· · ·	· · · · ·		 	210 212 213 213
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2	Exercises Reference ner-order Solution	Diffe of the l	rent hom	ial] ogene	Equa eous	ation equa	ns ation	 ation	· · ·	· · ·	· · ·	· · · · ·		· ·	210 212 213 213 213 215
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 V	Diffe of the l of the p ariation	rent hom non-	ial logend	Equa eous ogen mete	ation equa eous	ns ation equa	 ation	• • • •	· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· ·	. 210 . 212 213 . 213 . 213 . 215 . 215
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3	Exercises Reference Solution 16.2.1 Vi Determin	Diffe of the l of the l ariation	rent hom non- n of of th	ial l ogene home paras	Equa eous ogen mete	ation equa eous ers ry co	ns ation equa	· · · • · · • · · • · · nts	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·	• • • •	· · ·	210 212 213 213 213 215 215 215 218
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Va Determin Stability	of the pariation of condition	hom non- n of of th	bial l ogeno homo paras e art	Equa eous ogen mete oitrai	equa equa ecus ers ry co	ns ation equa 	 ation nts	· · ·	· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·	201 210 212 213 213 215 215 215 215 218 219
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 V Determin Stability 16.4.1 N	r Diffe of the l of the l ariation ation of conditi eccessar	erent hom non- n of of th ions ry ar	bial l ogeno homo para e art	Equa eous ogen mete oitrai	ation equa eous ers ry co	ns ation equa nsta 	 ation nts 	· · ·	 	 	· · ·		· · ·	201 210 212 213 213 213 215 215 215 218 219
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Va Determin Stability 16.4.1 N (H	Diffe of the l of the l ariation action of conditi eccessar Routh-I	rent hom non- of th ions ry an Hurv	ial logend homo para e art 	Equa eous ogen mete oitran fficie	ation equa eous ers ry co ent st	ns ation equa nsta abili	 ation nts 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	201 210 212 213 213 215 215 215 215 218 219 221
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Vi Determin Stability 16.4.1 N (H 16.4.2 N	Diffe of the p of the p ariation ation c conditi ecessar Routh-J ecessar	rent hom non- of th ions ry an Hurv	ial logend homo paras e art d su vitz) d su	Equa eous ogen mete oitran fficie	ation equa eous ers ry co ent st	ns ation equa nsta abili 	ation nts 	 		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · ·	201 210 212 213 213 215 215 215 218 219 221
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Vi Determin Stability 16.4.1 N (H 16.4.2 N (I	Diffe of the b of the b ariation ation of conditi eccessar Routh-l eccessar	hom non- n of of th ions ry an Hurv ry an	bogend homo para e arb id su vitz) id su part	Equa eous ogen mete oitrai fficie fficie	ation equa eous ers ry co ent st 	ns ation equa onsta abili abili	 ation nts ity co	 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	233 210 212 213 213 215 215 215 215 218 219 221 221
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Vi Determin Stability 16.4.1 N (I 16.4.2 N (I Exercises	Diffe of the b of the b ariation conditi eccessar Routh-I eccessar	rent hom non- n of of th ions y ar Hurv y ar Hurv y ar	bial l ogena homo para e art d su vitz) id su part	Equa eous ogen mete bitran fficie	equa eous ers ry co 	ns equa nsta abili abili	 ation . ty co 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	233 210 212 213 213 215 215 215 215 218 219 221 221 223 223
16	15.2 15.3 Higl 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 V Determin Stability 16.4.1 N (H 16.4.2 N (I Exercises 16.5.1 E	Diffe of the l of the l ariation conditi ecessar Routh-I ecessar Liénard s	erent hom non- n of of th ions y an Hurv y an I-Chi	ial l ogend homo paras e art d su vitz) d su part	Equa eous ogen meteoitran fficie fficie	ation equa eous ers cry co 	ns equa abili abili	nts	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	231 210 212 213 213 215 215 215 215 218 219 221 223 223 223 223
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 V Determin Stability 16.4.1 N (H 16.4.2 N (I Exercises 16.5.1 E 16.5.2 O	Diffe of the b of the b ariation ation c conditi eccessar Routh-I eccessar Liénard a xample ther ex	hom non- n of of th ions y an Hurv y an I-Chi	ial l ogend homo para e arb 	Equa eous ogen mete bitrau fflicie 	ation equa eous ers ry co 	ns equa nsta abili abili	 ation nts ty co 	 		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	213 213 213 215 215 215 215 218 219 221 223 223 223 223 225
16	15.2 15.3 Higl 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Vi Determin Stability 16.4.1 N (I Exercises 16.5.1 E 16.5.2 O Reference	Diffe of the b of the b ariation ation of conditi eccessar Routh-I eccessar biénard sample ther ex-	hom non- n of of th ions y ar Hurv y ar -Chi 	ial l ogen homo paras d su vitz) d su part	Equa eous ogen mete bitran fficie fficie)	ation equa eous ers ry co 	ns equa abili abili 	 ation nts ty co 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	213 213 213 215 215 215 215 218 219 221 223 223 223 223 225 225
16	15.2 15.3 Higl 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 16.6 Hig	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Va Determin Stability 16.4.1 N (H 16.4.2 N (I Exercises 16.5.1 E 16.5.2 O Reference	Diffe of the b of the b ariation ation of conditi eccessar Routh-I eccessar biénard sample ther ex- es	rrent hom non- n of th ions y ar Hurv y ar l-Chi e cerci	ial l ogen homo para d su vitz) d su part ses	Equa eous ogen mete bitrau fficie) fficie)	ation equa eous ers cy co ent st 	ns ation equa abili abili 		· · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 231 210 212 213 215 215 215 215 218 219 221 223 223 225 225 227
16	15.2 15.3 Hig 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 16.6 Hig	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Vi Determin Stability 16.4.1 N (H 16.4.2 N (I Exercises 16.5.1 E 16.5.2 O Reference her-order	Diffe of the p of the p ariation ation of conditi eccessar Routh-J eccessar Liénard ther ex es	rent hom non- n of bf th ions y an Hurv y an L-Chi e cerci f eren	ial 1 ogen homo para d su vitz) d su part ses tial 1	Equation of the second	ation equa eous ers cy co 	ns ation equa abili abili abili abili	ation ity co ity co ity co ity co ity co ity co ity co ity co ity co	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 231 210 212 213 215 215 215 215 218 219 221 223 223 225 225 225 227 227 227
16	15.2 15.3 Higl 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 16.6 Hig 17.1	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Vi Determin Stability 16.4.1 N (I Exercises 16.5.1 E 16.5.2 O Reference her-order Feedback	Diffe of the b of the b ariation ation of conditi eccessar Routh-l eccessar biénard ther ex- es fronteer control	rent hom non- n of of th ions y an Hurv y an I-Chi e e e e b an	ial l ogen homo para d su d su d su d su j ad su part ses tial i	Equa eous ogen mete bitran fficie) fficie) Equ abilis	ation equa eous ers ry co 	ns ation equa abili abili abili ns in n pol	ation nts ity co 		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 231 210 212 213 215 215 215 215 215 218 219 221 223 223 223 225 225 225 227 227 227 227 227 227
16	15.2 15.3 Higl 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 16.6 Hig 17.1	Exercises Reference Solution Solution 16.2.1 Vi Determin Stability 16.4.1 N (I Exercises 16.5.1 E 16.5.2 O Reference her-order Feedback 17.1.1 Ir	Diffe of the b of the b ariation ation of conditi eccessar douth-l eccessar biénard ther ex- es	erent hom non- n of of th ions y an Hurv y ar -Chi cerci cerci cerci erent ol an	ial 1 ogen homo para d su vitz) d su part	Equa eous ogen mete bitran fficie fficie) Equ abilis	ation equa eous ers ry co 	ns ation equa abili abili abili abili abili abili 	ation nts ity co 				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 231 210 212 213 215 215 215 218 219 221 223 223 223 225 225 225 227 227 227 227 227

-

.

.

			17.1.2.1	Proportional stabilisation policy	231
			17.1.2.2	Mixed proportional-derivative stabilisation pol-	
				icy	232
			17.1.2.3	Integral stabilisation policy	233
	17.2	Exercis	ses		234
	17.3	Referen	nces		235
	~.	. .	-		
18	Sim	ultaneo	ous Syste	ems of Differential Equations	237
	18.1	First-o	order 2×2	systems in normal form	237
		18.1.1	General a method	solution of the homogeneous system: hrst	238
		18.1.2	General	solution of the homogeneous system: second	
			(or direc	t) method	240
			18.1.2.1	Unequal real roots	241
			18.1.2.2	Equal real roots	243
			18.1.2.3	Complex roots	244
		18.1.3	Particula	r solution. Determination of the arbitrary	
			constant	5	245
	18.2	First o	rder n×n	systems in normal form	245
		18.2.1	Solution	of the homogeneous system	247
			18.2.1.1	The matrix exponential	249
		18.2.2	Stability	conditions	251
			18.2.2.1	D-stability, and stabilisation of matrices	254
			18.2.2.2	Sensitivity analysis	255 [·]
			18.2.2.3	A digression on not-wholly-unstable systems .	259
			18.2.2.4	Proof of the stability conditions	262
		18.2.3	Particula	ar solution	264
			18.2.3.1	Variation of parameters	264
		18.2.4	Determin	nation of the arbitrary constants	265
	18.3	Genera	al systems	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	266
		18.3.1	First-ord	er systems not in normal form	267
		18.3.2	Higher-o	rder systems	268
			18.3.2.1	An example	268
			18.3.2.2	The general case	270
		·	18.3.2.3	Transformation of a higher-order system into	
			نو	a first-order system in normal form	271
			18.3.2.4	Stability conditions for higher-order systems .	273
	18.4	Exerci	ses	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	273
		18.4.1	Example		273
		18.4.2	Other ex	ercises	275
	18.5	Refere	nces		277

٠

•		
19 Differential Equation Systems in Economic Models		279
19.1 Stability of Walrasian general equilibrium of exchange .		279
19.1.1 Static stability		280
19.1.2 Dynamic stability		283
19.2 Human capital in a growth model		286
19.3 A digression on 'arrow diagrams'		291
19.4 Balanced growth in a multi-sector economy		293
19.5 Exercises		298
19.6 References		301

١

1

III ADVANCED TOPICS

20 Comparative Statics and the Correspondence Principle	305
20.1 Introduction	305
20.2 The method of comparative statics	306
20.2.1 Purely qualitatively comparative statics	310
20.2.2 The inverse comparative statics problem	310
20.3 Comparative statics and optimizing behaviour	311
20.4 Comparative statics and dynamic stability of equilibrium: the	ne
'correspondence principle'	314
20.4.1 Criticism and qualifications	316
20.5 Extrema and dynamic stability	318
20.5.1 An application to the theory of the firm	323
20.6 Elements of comparative dynamics	324
20.7 An illustrative application of the correspondence principle: the	ne
IS-LM model	325
20.8 Exercises	328
20.9 References	329
21 Stability of Equilibrium: A General Treatment	· 331
$21.1 Introduction \dots \dots$	331
21.2 Basic concepts and definitions	332
21.2.1 Stability	333
21.2.2 Further definitions	337
21.2.3 Structural stability	338
21.3 Qualitative methods: phase diagrams	341
21.3.1 Single equations	342
21.3.2 Two-equation simultaneous systems	346
21.3.2.1 Introduction: phase plane and phase path	346
21.3.2.2 Singular points	347
21.3.2.3 Graphical construction of the trajectories	350
21.3.2.4 Linear systems	356
21.4 Quantitative methods	360

.

303

.

.

-

		21.4.1 Linearisation
	21.5	Elements of the qualitative theory of difference equations 363
-		21.5.1 Single difference equations
		21.5.2 Two simultaneous difference equations
	21.6	Economic applications
	21.7	Exercises
	21.8	References
22	Sade	tle Points and Economic Dynamics 373
	22.1	Saddle points in optimal control problems
		22.1.1 Introduction
		22.1.2 The maximum principle
	22.2	Optimal economic growth
		22.2.1 Optimal growth: traditional
		22.2.1.1 The setting of the problem $\ldots \ldots 378$
		22.2.1.2 The optimality conditions in the basic neo- classical model
		22.2.1.3 Saddle-point transitional dynamics in the ba-
		sic neoclassical model
		22.2.2 Optimal growth: endogenous
		22.2.2.1 A model of optimal endogenous growth 386
		22.2.2.2 The conditions for optimal endogenous growth 388
		22.2.2.3 Optimal endogenous growth: saddle-point tran- sitional dynamics
	22.3	Rational expectations and saddle points
		22.3.1 Introduction
		22.3.2 Rational expectations, saddle points, and overshooting 397
		22.3.3 Rational expectations and saddle points: the general
		case
	22.4	Exercises
	22.5	References
23	Liap	ounov's Second Method 407
	23.1	General concepts
	23.2	The fundamental theorems
	23.3	Some economic applications
		23.3.1 Global stability of Walrasian general equilibrium 413
		23.3.2 Rules of thumb in business management
		23.3.3 Price adjustment and oligopoly under product differ-
		entiation
	23.4	Exercises
	23.5	References

;

	Ν.	
Intr	oduction to Nonlinear Dynamics	429
24.1	Preliminary remarks	429
24.2	Some integrable differential equations	431
	24.2.1 First-order and first-degree exact equations	431
	24.2.2 Linear equations of the first order with variable coeffi-	
	cients	434
	24.2.3 The Bernoulli equation	436
24.3	Limit cycles and relaxation oscillations	. 437
	24.3.1 Limit cycles: the general theory	437
	24.3.2 Limit cycles: relaxation oscillations	439
	24.3.3 Kaldor's non-linear cyclical model	441
	24.3.3.1 The model	441
	24.3.3.2 Kaldor via relaxation oscillations	. 445
	24.3.3.3 Kaldor via Poincaré's limit cycle	447
24.4	The Lotka-Volterra equations	449
	24.4.1 Construction of the integral curves	454
	24.4.2. Conservative and dissipative systems, and	
	irreversibility	456
	24.4.3 Goodwin's growth cycle	458
	24 4 3 1 The model	458
	24432 The phase diagram of the model	461
24 5	Exercises	464
24.0	References	466
21.0		. 100
Bifu	rcation Theory	469
25.1	Introduction	. 469
25.2	Bifurcations in continuous time systems	. 469
	25.2.1 Codimension-one bifurcations	. 471
	25.2.2 The Hopf bifurcation	. 475
	25.2.3 Sensitivity analysis and bifurcations: a reminder	. 479
	25.2.4 Kaldor's non-linear cyclical model again	. 480
	25.2.5 Oscillations in optimal growth models	. 481
	25.2.5.1 The model	. 481
	25.2.5.2 The optimality conditions	483
	25.2.5.3 Emergence of a Hopf bifurcation	. 484
	25.2.6 Cycles in an IS-LM model with pure money financing	. 486
0r 9	Bifurcations in discrete time systems	488
20.0		. 100
20.3	25.3.1 Codimension-one bifurcations	. 489
20.3	25.3.1 Codimension-one bifurcations	. 400 . 489 . 491
20.3	25.3.1 Codimension-one bifurcations	. 489 . 491 . 492
20.3	25.3.1Codimension-one bifurcations25.3.2The Hopf bifurcation in discrete time25.3.3Kaldor's cyclical model in discrete time25.3.4Liquidity costs in the firm	. 489 . 491 . 492 . 494
20.3	25.3.1 Codimension-one bifurcations	. 489 . 491 . 492 . 494 . 494
20.3	25.3.1 Codimension-one bifurcations	. 489 . 491 . 492 . 494 . 494 . 494
	Intr 24.1 24.2 24.3 24.4 24.5 24.6 Bifu 25.1 25.2	Introduction to Nonlinear Dynamics 24.1 Preliminary remarks 24.2 Some integrable differential equations 24.2.1 First-order and first-degree exact equations 24.2.2 Linear equations of the first order with variable coefficients 24.2.3 The Bernoulli equation 24.3.1 Limit cycles: the general theory 24.3.2 Limit cycles: relaxation oscillations 24.3.3 Kaldor's non-linear cyclical model 24.3.3.4 Kaldor's non-linear cyclical model 24.3.3.2 Kaldor via relaxation oscillations 24.3.3.3 Kaldor via Poincaré's limit cycle 24.4 The Lotka-Volterra equations 24.4.1 Construction of the integral curves 24.4.2 Conservative and dissipative systems, and irreversibility 24.4.3 Goodwin's growth cycle 24.4.3.1 The model 24.4.3.2 The phase diagram of the model 24.4.3.2 The phase diagram of the model 24.4.3.2 The phase diagram of the model 25.2 Bifurcations in continuous time systems 25.2.1 Codimension-one bifurcations 25.2.2 The Hopf bifurcation 25.2.3 Sensitivity analysis and bifurcations: a reminder 25.2.4 Kaldor's non-linear cyclical model again 25.2.5.1 The model 25.2.5.2 The optimality conditions 25.2

XVII

•

.

.

ŧ

.

١

Contents

ŧ

;

•

•

.....

•		١.	
	25.5	References	501
26	Con	pplex Dynamics	503
	26.1	Introduction	503
	26.2	Discrete time systems and chaos	505
	20.2	26.2.1 The logistic map	505
		$26.2.1$ The logistic map \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots $26.9.2$ Intermittency	512
		26.2.2 The basic theorems	512
		26.2.4 Discrete time abass in economies	515
		20.2.4 Discrete time chaos in economics $\dots \dots \dots \dots \dots$	515
		20.2.4.1 Chaos in growth theory	516
	<u>06</u> 2	Zo.2.4.2 Exchange fate dynamics and chaos	510
	20.5	Continuous time systems and chaos	010 E10
		20.5.1 The Lorenz equations, strange attractors, and chaos	010
		20.3.2 Other routes to continuous time chaos	521
		20.3.2.1 The Rossier attractor	521
		26.3.2.2 The Shil nikov scenario	521
		26.3.2.3 The forced oscillator	522
		26.3.2.4 The coupled oscillator	522
		26.3.3 International trade as the source of chaos	526
		26.3.4 A chaotic growth cycle	527
	26.4	Significance and detection of chaos: Stochastic dynamics or	
		chaos?	528
	26.5	Other approaches	532
		26.5.1 Introduction	532
		26.5.2 Fast and slow, and synergetics	533
		26.5.3 Catastrophe theory	536
	26.6	Exercises	538
	26.7	References	540
27	Mix	ed Differential-Difference Equations	545
	27.1	General concepts	545
	27.2	Continuous vs discrete time in economic models	545
	27.3	Linear mixed equations	550
	27.4	The method of solution	550
	27.5	Stability conditions	555
	27.6	Delay differential equations and chaos	556
	27.7	Some economic applications	556
		27.7.1 Kalecki's business cycle model	557
		27.7.1:1 The model	557
		27.7.1.2 The dynamics	559
		27.7.2 A formalization of the classical price-specie-flow mech-	
		anism of balance of payments adjustment	563
		27.7.2.1 The model	563
		27.7.2.2 Stability	565

Contents	*													XIX														
					١							•																
27.8	Exercises .					•		•					•	•		•			•		•		-		•		567	
27.9	References	•••			·	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	568	
Bibli	ography																										571 ,	
Nam	e Index												•												-		<u>5</u> 93	
Subj	ect Index																										599	

.

. *u*

· · ·