Ausgleichungsrechnung in linearen Modellen

von
Prof. Dr.-Ing. Erik W. Grafarend
Universität Stuttgart
und
Prof. Dr.-Ing. Burkhard Schaffrin
Ohio State University, Columbus/USA

B·I·
Wissenschaftsverlag
Mannheim · Leipzig · Wien · Zürich

Inhaltsverzeichnis

§1 . **Nicht-stochastische lineare Modelle** 1

(a) Konsistentes Gleichungssystem vermittelnder Beobachtungen: $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ 8

(b) Inkonsistentes Gleichungssystem vermittelnder Beobachtungen: $\mathbf{Ax} + \mathbf{i} = \mathbf{y}, \mathbf{y} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$ 16

(c) Konsistentes System von linearen Bedingungsgleichungen mit Unbekannten: $\mathbf{Ax} = \mathbf{By}, \ \mathbf{By} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ 28

(d) Inkonsistentes System von homogenen Bedingungsgleichungen mit Unbekannten: $\mathbf{Ax} + \mathbf{Bi} = \mathbf{By}, \mathbf{By} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Spezialfall: $\mathbf{Bi} = \mathbf{By}$ 34

(e) Konsistentes System von inhomogenen Bedingungsgleichungen mit Unbekannten: $\mathbf{Ax} = \mathbf{By} - \mathbf{c}, \mathbf{By} \in \mathbf{c} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$ 54

(f) Inkonsistentes System von inhomogenen Bedingungsgleichungen mit Unbekannten: $\mathbf{Ax} + \mathbf{Bi} = \mathbf{By} - \mathbf{c}, \mathbf{By} \notin \mathbf{c} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$ 57

(g) Inkonsistentes System von inhomogenen Bedingungsgleichungen mit Unbekannten mit zusätzlichen inhomogenen, aber konsistenten Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten allein und zusätzlichen inhomogenen, aber beliebigen Bedingungsgleichungen zwischen den Beobachtungen allein: $\mathbf{Ax} + \mathbf{Bi} = \mathbf{By} - \mathbf{c}$, 66

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_3 \in \mathcal{R}(\mathbf{A}_3)$$

(h) Lineare Systeme mit Ungleichungen: $\mathbf{B}_1\mathbf{i} = \mathbf{B}_1\mathbf{y} - \mathbf{c}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{i} = \mathbf{B}_2\mathbf{y} - \mathbf{c}_2, \mathbf{Cx} \leq \mathbf{b}$ 78

§2 . Stochastische lineare Modelle vom Typ Gauß-Markov **87**

(a) Homogenisierte Form des allgemeinen stochastischen linearen Modells vom Typ Gauß-Markov 91

(b) Spezielles Gauß-Markov-Modell: 92
$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}\}$, $\mathbf{E}\{\mathbf{y}\} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$,
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = m$, $\mathbf{V}\sigma^2 = \mathbf{D}\{\mathbf{y}\}$, $\operatorname{rk}\mathbf{V} = n$

(c) Spezielles Gauß-Markov-Modell mit Datumdefekt (Kollinearität): $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}\}$, $\mathbf{E}\{\mathbf{y}\} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\operatorname{rk}\mathbf{A} =: r \leq m$, $\mathbf{V}\sigma^2 = \mathbf{D}\{\mathbf{y}\}$, $\operatorname{rk}\mathbf{V} = n$ 107

(d) Spezielles Gauß-Markov-Modell mit Restriktionen: 165
$\mathbf{A}_1\boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}_1\}$, $\mathbf{E}\{\mathbf{y}_1\} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}_1)$, $\operatorname{rk}\mathbf{A}_1 =: r_1 \leq m$, $\mathbf{V}_1\sigma^2 = \mathbf{D}\{\mathbf{y}_1\}$, $\mathbf{V}_1$ positiv-definit, $\operatorname{rk}\mathbf{V}_1 = n_1$, $\mathbf{A}_2\boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}_2\}$, $\mathbf{E}\{\mathbf{y}_2\} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}_2)$, $\operatorname{rk}\mathbf{A}_2 =: r_2 \leq m$, $\mathbf{V}_2\sigma^2 = \mathbf{D}\{\mathbf{y}_2\}$, $\mathbf{V}_2$ positiv-definit, $\operatorname{rk}\mathbf{V}_2 = n_2$, $0 = \mathbf{C}\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$, $\operatorname{rk}[\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2'] = r \leq m$

(e) Spezielles Gauß-Markov-Modell mit Datumdefekt (Kollinearität) und singulärer Dispersionsmatrix: 206
$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}\}$, $\mathbf{E}\{\mathbf{y}\} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\operatorname{rk}\mathbf{A} =: r \leq m$, $\mathbf{V}\sigma^2 = \mathbf{D}\{\mathbf{y}\}$, $\mathbf{V}$ positiv-semidefinit, $\operatorname{rk}\mathbf{V} =: t \leq n$, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}([\mathbf{A}, \mathbf{V}])$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

(f) Gemischtes Gauß-Markov-Modell mit fixen und Zufallsparametern: 289
$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{C}\mathbf{E}\{\mathbf{z}\} = \mathbf{E}\{\mathbf{y}\}$, $\mathbf{E}\{\mathbf{y}\} \in \mathcal{R}([\mathbf{A}, \mathbf{C}])$, $\operatorname{rk}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] = m + l < n$, $\mathbf{E}\{\mathbf{z}\}$ unbekannt, $\mathbf{Z}\sigma^2 = \mathbf{D}\{\mathbf{z}\}$, $\mathbf{Z}$ positiv-semidefinit, $\operatorname{rk}\mathbf{Z} = s \leq l$, $\mathbf{V}\sigma^2 = \mathbf{D}\{\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}\}$, $\mathbf{V}$ positiv-semidefinit, $\operatorname{rk}\mathbf{V} = t \leq n$, $\operatorname{rk}[\mathbf{V}, \mathbf{C}\mathbf{Z}] = n$, $\mathbf{C}\{\mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}\} = 0$.

§3. Äquivalenzsätze **335**

(a) Begründung der Ausgleichungsrechnung für das Spezielle Gauß-Markov-Modell 339

(b) Begründung der Ausgleichungsrechnung für das Spezielle Gauß-Markov-Modell mit Datumdefekt (Kollinearität) 342

(c) Begründung der Ausgleichungsrechnung für das Spezielle Gauß-Markov-Modell mit Restriktionen 353

(d) Begründung der Ausgleichungsrechnung für das Allgemeine Gauß-Markov-Modell mit Datumdefekt (Kollinearität) und singulärer Dispersionsmatrix 387

Anhänge

A. Matrix-Algebra und Matrix-Analysis 407

B. Lagrange-Multiplikatoren 452

C. Statistische Grundbegriffe 465

Literaturverzeichnis 476

Sachverzeichnis 479