

Andreas Merk

# **Optionsbewertung in Theorie und Praxis**

Theoretische und empirische Überprüfung  
des Black/Scholes-Modells

Mit Geleitworten von  
Prof. Dr. Ulrich Pape und Prof. Dr. Dr. Didier Marteau



**RESEARCH**

# Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis .....	XXIII
Symbolverzeichnis .....	XXVII
Abbildungsverzeichnis .....	XXXI
Tabellenverzeichnis .....	XXXV
1 Einführung .....	1
1.1 Entwicklung und Bedeutung der Optionsbewertung .....	1
1.2 Problemstellung .....	4
1.3 Zielsetzung .....	5
1.4 Vorgehensweise .....	6
2 Grundlagen finanzwirtschaftlicher Optionen .....	11
2.1 Kontraktsspezifikationen von Optionen .....	11
2.2 Zusammensetzung des Optionspreises .....	12
2.2.1 Innerer Wert der Option .....	12
2.2.2 Zeitwert der Option .....	12
2.2.3 Illustration des inneren Wertes anhand von Transaktionsdaten .....	14
2.3 Ausübung von Optionen .....	18
2.4 Modelle zur Optionsbewertung .....	20
2.4.1 Überblick .....	20
2.4.2 CRR-Binomialmodell .....	26
2.4.3 Black/Scholes-Modell .....	32
2.4.3.1 Überblick .....	32
2.4.3.2 Martingal .....	34
2.4.3.3 Risikoneutrale Bewertung .....	36
2.4.3.4 Itô-Formel .....	39
2.4.3.5 Herleitung der Black/Scholes-Differentialgleichung .....	40
2.4.3.5.1 Hedging Portfolio Argument .....	42
2.4.3.5.2 Replizierendes Portfolio Argument .....	44
2.4.3.5.3 Martingalpreismaß .....	46

2.4.3.6 Herleitung der Black/Scholes-Formel.....	49
2.4.3.7 Praktische Bedeutung des Black/Scholes-Modells.....	53
2.5 Analyse der Sensitivität eines Optionsportfolios .....	57
2.5.1 Sensitivität auf den Aktienkurs: Delta.....	59
2.5.2 Sensitivität auf die reelle Volatilität: Gamma .....	65
2.5.3 Sensitivität auf die implizite Volatilität: Vega.....	71
2.5.4 Sensitivität auf die Restlaufzeit: Theta.....	73
2.5.5 Sensitivität auf den risikofreien Zinssatz: Rho.....	75
2.6 Zusammenfassung .....	76
3 Put-Call-Parität.....	81
3.1 Herleitung der Put-Call-Parität.....	81
3.2 Illustration der Put-Call-Parität .....	86
3.3 Bisherige empirische Untersuchungen zur Put-Call-Parität.....	87
3.4 Empirische Überprüfung der Put-Call-Parität .....	91
3.4.1 Datengrundlage .....	91
3.4.2 Methodik .....	94
3.4.2.1 Überblick .....	94
3.4.2.2 Zeitsynchronität .....	94
3.4.2.3 Besonderheiten der DAX-Option .....	101
3.4.2.4 Modellunabhängige Wertuntergrenze.....	102
3.4.2.5 Zinssatz .....	103
3.4.2.6 Frühzeitige Ausübung und Dividenden .....	103
3.4.2.7 Transaktionskosten .....	104
3.4.3 Anzahl von Verstößen gegen die Put-Call-Parität.....	106
3.4.4 Transaktionskosten für Market Maker und Privatinvestoren .....	107
3.4.5 Konstruktion der Handelsposition und Rechenparameter.....	109
3.4.6 Berechnung des Arbitragegewinns.....	110
3.4.6.1 Überblick .....	110
3.4.6.2 Arbitragegewinn für Privatinvestoren.....	112
3.4.6.3 Arbitragegewinn für Market Maker und Privatinvestoren.....	115
3.4.6.4 Arbitragegewinn für Market Maker.....	118
3.4.6.5 Häufigkeitsverteilung von Transaktionsgrößen.....	121
3.5 Zusammenfassung .....	122

---

4	Volatilität.....	125
4.1	Historische Volatilität .....	125
4.1.1	Definition der historischen Volatilität.....	125
4.1.2	Annualisierung der Volatilität.....	127
4.2	Implizite Volatilität .....	129
4.2.1	Stellenwert der impliziten Volatilität .....	129
4.2.2	Ermittlung der impliziten Volatilität .....	130
4.2.2.1	Newton/Raphson-Verfahren .....	131
4.2.2.2	Verfahren der Deutschen Börse AG.....	132
4.2.3	Konvergenz und Grenzen der Verfahren .....	133
4.2.3.1	Newton/Raphson-Verfahren .....	133
4.2.3.2	Bisection-Verfahren.....	137
4.2.3.3	Verfahren der Deutschen Börse AG.....	138
4.2.3.4	Vergleich der Verfahren zur Ermittlung der impliziten Volatilität..	139
4.2.3.5	Probleme bei der Ermittlung der impliziten Volatilität .....	142
4.2.4	Optimale Optionsparameter zur Ermittlung der impliziten Volatilität ..	144
4.2.5	Zusammenfassung.....	150
4.3	Empirie zur impliziten Volatilität und risikoneutralen Dichte.....	151
4.4	Empirische Untersuchung der impliziten Volatilität.....	156
4.4.1	Überblick.....	156
4.4.2	Datenbasis .....	156
4.4.3	Darstellung der impliziten Volatilität von Calls und Puts.....	159
4.4.4	Überprüfung des mittleren Volatilitätsniveaus von Calls und Puts .....	166
4.4.5	Überprüfung der impliziten Volatilitäten von Calls und Puts.....	172
4.5	Kritik an Interpretationen der impliziten Volatilität .....	176
4.5.1	Aussagekraft gebunden an einzelne Option.....	176
4.5.2	Mangelhafte Feststellung von Fehlbewertungen.....	177
4.5.3	Kein Marktconsens zukünftiger Preisbewegungen.....	178
4.5.4	Inkonsistenz der Berechnungsweise.....	180
4.5.5	Kalibrierung des Optionsbewertungsmodells .....	181
4.5.6	Residualgröße.....	183
4.5.7	Empirische Ergebnisse .....	185
4.6	Zusammenfassung.....	186

---

5	Theoretische Überprüfung des Black/Scholes-Modells .....	189
5.1	Überblick .....	189
5.2	Friktionsloser Markt .....	189
5.2.1	Liquidität .....	189
5.2.2	Synchronisierung des Aktien- und Optionsmarktes .....	199
5.2.3	Abwesenheit von Transaktionskosten .....	201
5.2.4	Kontinuierlicher Handel .....	210
5.3	Risikoloser Zinssatz .....	211
5.4	Konstante Volatilität .....	212
5.5	Geometrische Brownsche Bewegung .....	216
5.5.1	Formale Herleitung .....	216
5.5.2	Normalverteilung der Renditen .....	221
5.5.3	Log-Normalverteilung des DAX .....	226
5.6	Zusammenfassung .....	242
6	Empirische Überprüfung des Black/Scholes-Modells .....	245
6.1	Überblick .....	245
6.2	Literaturüberblick zur Bewertung von Indexderivaten .....	246
6.3	Aufbau und Methodik der Studie .....	257
6.3.1	Kapitalmarktdaten .....	257
6.3.2.1	DAX auf Xetra .....	258
6.3.2.2	DAX-Option .....	262
6.3.2.3	Risikoloser Zinssatz .....	265
6.3.2.4	Restlaufzeit der Optionen .....	269
6.3.2.5	Dividenden .....	269
6.3.2.6	Volatilität .....	270
6.3.2	Deskriptive Statistiken .....	277
6.3.3	Datensynchronisation und Fehlerbereinigung .....	293
6.3.3.1	Synchronisierung von Optionspreis und DAX-Tickdaten .....	294
6.3.3.2	Datenbereinigung in der Optionspreisliteratur .....	295
6.3.3.3	Definition und Kennzeichnung annullierter Handelsgeschäfte .....	297
6.3.3.4	Methodik der Datenbereinigung .....	299
6.3.3.5	Umfang und ökonomische Signifikanz annullierter Handelsgeschäfte .....	300
6.3.3.6	Verstöße gegen die Put-Call-Parität .....	306

6.3.3.7 Verstöße gegen verteilungsfreie Wertgrenzen.....	308
6.3.3.8 Optionen am Verfalltag .....	310
6.3.3.9 Mindestpreiskriterium.....	313
6.3.3.10 Übersicht über das Bereinigungsverfahren.....	317
6.4 Berechnung der Fehlbewertungen.....	317
6.4.1 Deskriptive Statistiken für Optionen unterschiedlicher Kategorien.....	318
6.4.1.1 Out-of-the-money Calls .....	319
6.4.1.2 At-the-money Calls.....	320
6.4.1.3 In-the-money Calls .....	321
6.4.1.4 Out-of-the-money Puts .....	323
6.4.1.5 At-the-money Puts .....	324
6.4.1.6 In-the-money Puts.....	326
6.4.1.7 Zusammenfassung .....	327
6.4.2 Optionspreise in Abhängigkeit von der Moneyness .....	328
6.4.3 Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen.....	329
6.4.3.1 Out-of-the-money Calls .....	330
6.4.3.2 At-the-money Calls.....	332
6.4.3.3 In-the-money Calls .....	334
6.4.3.4 Out-of-the-money Puts .....	336
6.4.3.5 At-the-money Puts .....	338
6.4.3.6 In-the-money Puts.....	340
6.4.3.7 Zusammenfassung .....	341
6.4.4 Statistische Signifikanz der Fehlerabweichungen.....	347
6.4.4.1 Überprüfung der Optionspreise auf Normalverteilung.....	348
6.4.4.2 Überprüfung der Gleichheit von BS- und Marktpreisen .....	348
6.4.4.3 Zusammenfassung des Vergleichs von BS- und Marktpreisen ...	350
6.4.5 Bedeutung des Volatilitätsparameters für die Optionspreisschätzung ....	351
6.4.5.1 Diebold/Mariano-Teststatistik .....	351
6.4.5.2 Ergebnisse für den gesamten Untersuchungszeitraum .....	352
6.4.5.3 Ergebnisse bei monatsweiser Betrachtung .....	353
6.4.5.4 Zusammenfassung .....	354
6.4.6 Eignung des Black/Scholes-Modells zur Optionsbewertung.....	355
6.5 Zusammenfassung.....	362
7 Schlussbetrachtung.....	365

---

Anhang .....	373
1. Historische Zusammensetzung des DAX .....	373
2. Market Maker für die DAX-Option .....	374
3. Verfall- und Ausübungstage an der Eurex .....	376
4. Erwartungswert und Varianz .....	377
5. Datenextrahierung und Datenbearbeitung .....	378
5.1 Variable DAX-Kurse .....	378
5.2 Täglicher Zinssatz .....	378
5.3 Variable Optionspreise .....	385
5.4 Annullierte Transaktionen .....	389
6. Dateninput .....	391
7. Berechnungen für den Wilcoxon-Rangtest .....	393
7.1 Mediane der Volatilität .....	393
7.2 Mittelwerte der Volatilität .....	396
8. Zusätzliche Auswertungen .....	399
8.1 Arbitragegewinne in den einzelnen Monaten .....	399
8.1.1 Arbitragegewinne im Januar 2004 .....	399
8.1.2 Arbitragegewinne im Februar 2004 .....	400
8.1.3 Arbitragegewinne im März 2004 .....	400
8.1.4 Arbitragegewinne im April 2004 .....	400
8.1.5 Arbitragegewinne im Mai 2004 .....	401
8.1.6 Arbitragegewinne im Juni 2004 .....	401
8.2 Bereinigte Arbitragehöhe für normale Handelsteilnehmer .....	401
8.3 Bereinigte Arbitragehöhe für Market Maker .....	402
8.4 Überprüfung des Niveaus der impliziten Volatilität .....	403
Literaturverzeichnis .....	411
Stichwortverzeichnis .....	443