

SERGE FRANCINO  
HERVÉ GIANELLA  
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques  
des oraux  
de l'École polytechnique  
et des Écoles normales supérieures

Analyse. Tome I

*Deuxième édition, revue  
et augmentée*

CASSINI

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1. Nombres réels et complexes. Topologie de <math>\mathbb{R}</math> et <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>5</b>
1.1. Développement décimal propre d'un réel . . . . .	7
1.2. Caractérisation des rationnels . . . . .	10
1.3. Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ . . . . .	12
1.4. Injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . . . . .	13
1.5. Calcul d'une somme . . . . .	14
1.6. Développement en série de Engel . . . . .	16
1.7. Représentation des réels $> 0$ comme sommes de séries . . . .	18
1.8. Sur le nombre $e$ . . . . .	21
1.9. Irrationalité de $\pi$ . . . . .	22
1.10. Irrationalité de $(\arccos 1/3)/\pi$ . . . . .	24
1.11. Nombres de Liouville . . . . .	25
1.12. Nombres de Pisot . . . . .	27
1.13. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ . . . . .	29
1.14. Une inégalité . . . . .	31
1.15. Inégalité du réordonnement . . . . .	31
1.16. Inégalité de Tchebychev . . . . .	33
1.17. Inégalité dans $\mathbb{C}$ (1) . . . . .	34
1.18. Inégalité dans $\mathbb{C}$ (2) . . . . .	36
1.19. Un lemme de confinement . . . . .	39
1.20. Équation fonctionnelle de Shapiro . . . . .	42
1.21. Homographies laissant invariant le disque unité . . . . .	43
1.22. Suites de polygones . . . . .	45
1.23. Mesure extérieure de Lebesgue . . . . .	47
1.24. Recouvrements . . . . .	49
1.25. Irrationnels denses dans une partie . . . . .	51
1.26. Application ouverte . . . . .	52
1.27. Partition dénombrable de $[0, 1]$ . . . . .	53
<b>Chapitre 2. Suites réelles et complexes</b>	<b>57</b>
2.1. Une étude de monotonie . . . . .	59
2.2. Permutation des termes d'une suite . . . . .	60
2.3. Suites sous-additives . . . . .	62
2.4. Suites monotones . . . . .	63
2.5. Suites convexes bornées . . . . .	64
2.6. Caractérisation de la convergence au sens de Cesàro . . . . .	65

2.7. Suites convergentes au sens de Cesàro telles que $u_n^6 \rightarrow 1$ . . .	66
2.8. Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente . . . . .	69
2.9. Théorème taubérien de Hardy . . . . .	70
2.10. Limites de tranches de Cauchy . . . . .	72
2.11. Valeurs d'adhérence d'une suite complexe . . . . .	75
2.12. Question de convergence . . . . .	76
2.13. Étude de convergence . . . . .	77
2.14. Minoration de la limite supérieure . . . . .	78
2.15. Suites et approximation diophantienne . . . . .	79
2.16. Équivalent d'une suite d'entiers . . . . .	81
2.17. Somme des puissances $n$ -ièmes des $n$ premiers entiers . . .	82
2.18. Racines itérées . . . . .	83
2.19. Un critère de convergence pour les systèmes dynamiques dis- crets . . . . .	86
2.20. Étude d'un système dynamique (1) . . . . .	88
2.21. Étude d'un système dynamique (2) . . . . .	90
2.22. Théorème de Sarkowski (1964) . . . . .	92
2.23. La fonction «tente» . . . . .	94
2.24. Un système dynamique discret et son analogue continu . .	96
2.25. Équivalent d'une suite définie par récurrence . . . . .	99
2.26. Développement asymptotique d'une suite récurrente (1) . .	100
2.27. Développement asymptotique d'une suite récurrente (2) . .	102
2.28. Détermination d'une suite récurrente . . . . .	103
2.29. Étude de $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$ . . . . .	104
2.30. Un exercice d'Olympiades . . . . .	106
2.31. Équivalent d'une suite récurrente . . . . .	107
2.32. Suite arithmético-géométrique perturbée . . . . .	109
2.33. Système dynamique perturbé . . . . .	110
2.34. Suite récurrente linéaire d'ordre 2 . . . . .	111
2.35. Une équation fonctionnelle . . . . .	113
2.36. Suites vérifiant $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$ . . . . .	113
2.37. Suites à récurrence linéaire (1) . . . . .	115
2.38. Suites à récurrence linéaire (2) . . . . .	118
2.39. Étude d'une suite récurrente . . . . .	119
2.40. Suite vérifiant $u_{n+1} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1})$ . . . . .	120
2.41. Suite vérifiant $u_{n+1} = \frac{f(u_1) + \dots + f(u_n)}{n}$ . . . . .	121
2.42. Suites de Schwob . . . . .	122
2.43. Moyenne arithmético-harmonique . . . . .	123
2.44. Récurrences simultanées . . . . .	125
2.45. Suite définie implicitement (1) . . . . .	127
2.46. Suite définie implicitement (2) . . . . .	127
2.47. Suite définie implicitement (3) . . . . .	128
2.48. Suite définie implicitement (4) . . . . .	129

2.49. Zéros des polynômes de Taylor d'ordre impair de l'exponentielle . . . . .	130
---	-----

### Chapitre 3. Séries numériques 133

3.1. Étude de convergence . . . . .	134
3.2. Une transformation d'Abel . . . . .	135
3.3. Nature d'une série (1) . . . . .	137
3.4. Nature d'une série (2) . . . . .	138
3.5. Majoration à l'aide d'une intégrale . . . . .	139
3.6. Sur la négligeabilité . . . . .	141
3.7. Série et suite . . . . .	142
3.8. Un théorème de comparaison . . . . .	143
3.9. Étude de convergence . . . . .	145
3.10. Condition nécessaire de convergence . . . . .	145
3.11. Entiers qui s'écrivent sans le chiffre 9 . . . . .	147
3.12. Critère de condensation de Cauchy . . . . .	147
3.13. Séries définies à l'aide d'une permutation de $\mathbb{N}^*$ . . . . .	149
3.14. Recherche d'un équivalent (1) . . . . .	151
3.15. Recherche d'un équivalent (2) . . . . .	152
3.16. Sommation d'équivalents . . . . .	153
3.17. Estimation d'une somme partielle . . . . .	155
3.18. Développement asymptotique de la série harmonique . . . . .	156
3.19. Calcul de la somme d'une série (1) . . . . .	159
3.20. Calcul de la somme d'une série (2) . . . . .	160
3.21. Recherche d'un équivalent . . . . .	163
3.22. Série des inverses des entiers premiers . . . . .	166
3.23. Série définie à partir de ppcm . . . . .	167
3.24. Nature d'une série . . . . .	167
3.25. Inversion de Möbius . . . . .	169
3.26. Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à $x$ . . . . .	172
3.27. Nature de $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ . . . . .	175
3.28. Suite $(a_n)$ telle $\sum a_n^k = 0$ pour tout entier $k$ non nul . . . . .	175
3.29. Construction d'une série complexe . . . . .	177
3.30. Développement asymptotique du terme général . . . . .	178
3.31. Autour des séries semi-convergentes . . . . .	180
3.32. Calcul de la somme d'une série alternée . . . . .	181
3.33. Transformation d'Euler . . . . .	182
3.34. Sommation par paquets . . . . .	185
3.35. Exemple de transformation d'Abel . . . . .	188
3.36. Étude asymptotique à l'aide de transformations d'Abel . . . . .	189
3.37. Séries de Hardy . . . . .	192
3.38. Recherche d'un équivalent (1) . . . . .	194
3.39. Recherche d'un équivalent (2) . . . . .	196

3.40. Convergence en moyenne d'un produit de Cauchy . . . . .	199
3.41. Application du théorème d'associativité . . . . .	201
3.42. Étude de sommabilité . . . . .	203
3.43. Convergence et somme d'une série double . . . . .	204
3.44. Étude de séries doubles . . . . .	205
3.45. Inégalité de Carleman (1923) . . . . .	208
3.46. Inégalité de Hardy . . . . .	210
3.47. Convergence commutative . . . . .	213
3.48. Théorème de Riemann . . . . .	217

## **Chapitre 4. Fonctions d'une variable réelle . . . . . 219**

4.1. Applications propres . . . . .	220
4.2. Zéros d'une combinaison linéaire d'exponentielles . . . . .	220
4.3. Un calcul de limite . . . . .	221
4.4. Fonctions sur-additives . . . . .	222
4.5. Points de discontinuité d'une fonction réglée . . . . .	224
4.6. Discontinuités d'une fonction monotone . . . . .	226
4.7. Continuité au sens de Cesàro . . . . .	227
4.8. Existence d'un point fixe . . . . .	228
4.9. Un théorème de Paul Lévy (1934) . . . . .	229
4.10. Une réciproque au théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	232
4.11. Sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes . . . . .	233
4.12. Conjugaison de deux homéomorphismes . . . . .	234
4.13. Nombre de rotation de Poincaré (1885) . . . . .	235
4.14. Morphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ respectant l'inverse . . . . .	237
4.15. Une équation fonctionnelle (1) . . . . .	238
4.16. Une équation fonctionnelle (2) . . . . .	239
4.17. Une équation fonctionnelle (3) . . . . .	240
4.18. Une équation fonctionnelle (4) . . . . .	241
4.19. Une équation fonctionnelle (5) . . . . .	241
4.20. Une équation fonctionnelle (6) . . . . .	243
4.21. Valeurs propres d'un opérateur . . . . .	244
4.22. Domination d'une fonction uniformément continue . . . . .	246
4.23. Lemme de Croft . . . . .	247
4.24. Étude d'un taux d'accroissement . . . . .	248
4.25. Pseudo-dérivée . . . . .	249
4.26. Limite d'une somme . . . . .	251
4.27. La fonction sinus n'est pas rationnelle . . . . .	252
4.28. Un cas simple du lemme de Sard . . . . .	253
4.29. Théorème de Darboux . . . . .	254
4.30. Sur la formule des accroissements finis . . . . .	256
4.31. Maximum local . . . . .	257
4.32. Dénombrabilité des maxima locaux . . . . .	259

4.33. Majoration de $f^2 + f'^2$ . . . . .	260
4.34. Interpolation par splines cubiques . . . . .	260
4.35. Interpolation d'Hermite . . . . .	264
4.36. Dérivées dominées par un polynôme . . . . .	266
4.37. Une généralisation du théorème de Rolle . . . . .	267
4.38. Minoration de la dérivée seconde . . . . .	268
4.39. Zéros des dérivées successives . . . . .	269
4.40. Théorème de Glaeser pour une variable (1963) . . . . .	270
4.41. Étude du maximum de $f \mapsto f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)$ . . . . .	272
4.42. Puissances entières . . . . .	273
4.43. Inégalités de Kolmogorov . . . . .	274
4.44. Théorème de division . . . . .	277
4.45. Le théorème de réalisation de Borel . . . . .	279
4.46. Théorème de Whitney . . . . .	282
4.47. Convexité . . . . .	284
4.48. Inégalité de convexité (1) . . . . .	285
4.49. Inégalité de convexité (2) . . . . .	285
4.50. Condition suffisante de convexité . . . . .	286
4.51. Minimum d'une fonction convexe . . . . .	287
4.52. Intervalle de monotonie d'une fonction strictement convexe . . . . .	288
4.53. Étude asymptotique d'une fonction convexe . . . . .	289
4.54. Combinaison convexe positive . . . . .	290
4.55. Fonctions à variation bornée . . . . .	292
4.56. Un développement asymptotique . . . . .	294
4.57. Estimation du maximum d'une fonction polynôme . . . . .	296
4.58. Dérivation d'équivalents . . . . .	299
4.59. Intégration d'équivalents . . . . .	301

**Table des matières****303****Index****309**