

SERGE FRANCINOU
HERVÉ GIANELLA
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques
des oraux
de l'École polytechnique
et des Écoles normales supérieures

Analyse. Tome I

*Deuxième édition, revue
et augmentée*

CASSINI

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Nombres réels et complexes. Topologie de \mathbb{R} et \mathbb{C}	5
1.1. Développement décimal propre d'un réel	7
1.2. Caractérisation des rationnels	10
1.3. Non-dénombrabilité de \mathbb{R}	12
1.4. Injection de \mathbb{R} dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$	13
1.5. Calcul d'une somme	14
1.6. Développement en série de Engel	16
1.7. Représentation des réels > 0 comme sommes de séries	18
1.8. Sur le nombre e	21
1.9. Irrationalité de π	22
1.10. Irrationalité de $(\arccos 1/3)/\pi$	24
1.11. Nombres de Liouville	25
1.12. Nombres de Pisot	27
1.13. Sous-groupes additifs de \mathbb{R}	29
1.14. Une inégalité	31
1.15. Inégalité du réordonnement	31
1.16. Inégalité de Tchebychev	33
1.17. Inégalité dans \mathbb{C} (1)	34
1.18. Inégalité dans \mathbb{C} (2)	36
1.19. Un lemme de confinement	39
1.20. Équation fonctionnelle de Shapiro	42
1.21. Homographies laissant invariant le disque unité	43
1.22. Suites de polygones	45
1.23. Mesure extérieure de Lebesgue	47
1.24. Recouvrements	49
1.25. Irrationnels denses dans une partie	51
1.26. Application ouverte	52
1.27. Partition dénombrable de $[0, 1]$	53
Chapitre 2. Suites réelles et complexes	57
2.1. Une étude de monotonie	59
2.2. Permutation des termes d'une suite	60
2.3. Suites sous-additives	62
2.4. Suites monotones	63
2.5. Suites convexes bornées	64
2.6. Caractérisation de la convergence au sens de Cesàro	65

2.7. Suites convergentes au sens de Cesàro telles que $u_n^6 \rightarrow 1$	66
2.8. Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente	69
2.9. Théorème taubérien de Hardy	70
2.10. Limites de tranches de Cauchy	72
2.11. Valeurs d'adhérence d'une suite complexe	75
2.12. Question de convergence	76
2.13. Étude de convergence	77
2.14. Minoration de la limite supérieure	78
2.15. Suites et approximation diophantienne	79
2.16. Équivalent d'une suite d'entiers	81
2.17. Somme des puissances n -ièmes des n premiers entiers	82
2.18. Racines itérées	83
2.19. Un critère de convergence pour les systèmes dynamiques discrets	86
2.20. Étude d'un système dynamique (1)	88
2.21. Étude d'un système dynamique (2)	90
2.22. Théorème de Sarkowski (1964)	92
2.23. La fonction «tente»	94
2.24. Un système dynamique discret et son analogue continu	96
2.25. Équivalent d'une suite définie par récurrence	99
2.26. Développement asymptotique d'une suite récurrente (1)	100
2.27. Développement asymptotique d'une suite récurrente (2)	102
2.28. Détermination d'une suite récurrente	103
2.29. Étude de $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$	104
2.30. Un exercice d'Olympiades	106
2.31. Équivalent d'une suite récurrente	107
2.32. Suite arithmético-géométrique perturbée	109
2.33. Système dynamique perturbé	110
2.34. Suite récurrente linéaire d'ordre 2	111
2.35. Une équation fonctionnelle	113
2.36. Suites vérifiant $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$	113
2.37. Suites à récurrence linéaire (1)	115
2.38. Suites à récurrence linéaire (2)	118
2.39. Étude d'une suite récurrente	119
2.40. Suite vérifiant $u_{n+1} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1})$	120
2.41. Suite vérifiant $u_{n+1} = \frac{f(u_1) + \dots + f(u_n)}{n}$	121
2.42. Suites de Schwob	122
2.43. Moyenne arithmético-harmonique	123
2.44. Récurrences simultanées	125
2.45. Suite définie implicitement (1)	127
2.46. Suite définie implicitement (2)	127
2.47. Suite définie implicitement (3)	128
2.48. Suite définie implicitement (4)	129

2.49. Zéros des polynômes de Taylor d'ordre impair de l'exponentielle	130
Chapitre 3. Séries numériques	133
3.1. Étude de convergence	134
3.2. Une transformation d'Abel	135
3.3. Nature d'une série (1)	137
3.4. Nature d'une série (2)	138
3.5. Majoration à l'aide d'une intégrale	139
3.6. Sur la négligeabilité	141
3.7. Série et suite	142
3.8. Un théorème de comparaison	143
3.9. Étude de convergence	145
3.10. Condition nécessaire de convergence	145
3.11. Entiers qui s'écrivent sans le chiffre 9	147
3.12. Critère de condensation de Cauchy	147
3.13. Séries définies à l'aide d'une permutation de \mathbb{N}^*	149
3.14. Recherche d'un équivalent (1)	151
3.15. Recherche d'un équivalent (2)	152
3.16. Sommation d'équivalents	153
3.17. Estimation d'une somme partielle	155
3.18. Développement asymptotique de la série harmonique	156
3.19. Calcul de la somme d'une série (1)	159
3.20. Calcul de la somme d'une série (2)	160
3.21. Recherche d'un équivalent	163
3.22. Série des inverses des entiers premiers	166
3.23. Série définie à partir de ppcm	167
3.24. Nature d'une série	167
3.25. Inversion de Möbius	169
3.26. Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à x	172
3.27. Nature de $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$	175
3.28. Suite (a_n) telle $\sum a_n^k = 0$ pour tout entier k non nul	175
3.29. Construction d'une série complexe	177
3.30. Développement asymptotique du terme général	178
3.31. Autour des séries semi-convergentes	180
3.32. Calcul de la somme d'une série alternée	181
3.33. Transformation d'Euler	182
3.34. Sommation par paquets	185
3.35. Exemple de transformation d'Abel	188
3.36. Étude asymptotique à l'aide de transformations d'Abel	189
3.37. Séries de Hardy	192
3.38. Recherche d'un équivalent (1)	194
3.39. Recherche d'un équivalent (2)	196

3.40. Convergence en moyenne d'un produit de Cauchy	199
3.41. Application du théorème d'associativité	201
3.42. Étude de sommabilité	203
3.43. Convergence et somme d'une série double	204
3.44. Étude de séries doubles	205
3.45. Inégalité de Carleman (1923)	208
3.46. Inégalité de Hardy	210
3.47. Convergence commutative	213
3.48. Théorème de Riemann	217

Chapitre 4. Fonctions d'une variable réelle **219**

4.1. Applications propres	220
4.2. Zéros d'une combinaison linéaire d'exponentielles	220
4.3. Un calcul de limite	221
4.4. Fonctions sur-additives	222
4.5. Points de discontinuité d'une fonction réglée	224
4.6. Discontinuités d'une fonction monotone	226
4.7. Continuité au sens de Cesàro	227
4.8. Existence d'un point fixe	228
4.9. Un théorème de Paul Lévy (1934)	229
4.10. Une réciproque au théorème des valeurs intermédiaires	232
4.11. Sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes	233
4.12. Conjugaison de deux homéomorphismes	234
4.13. Nombre de rotation de Poincaré (1885)	235
4.14. Morphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ respectant l'inverse	237
4.15. Une équation fonctionnelle (1)	238
4.16. Une équation fonctionnelle (2)	239
4.17. Une équation fonctionnelle (3)	240
4.18. Une équation fonctionnelle (4)	241
4.19. Une équation fonctionnelle (5)	241
4.20. Une équation fonctionnelle (6)	243
4.21. Valeurs propres d'un opérateur	244
4.22. Domination d'une fonction uniformément continue	246
4.23. Lemme de Croft	247
4.24. Étude d'un taux d'accroissement	248
4.25. Pseudo-dérivée	249
4.26. Limite d'une somme	251
4.27. La fonction sinus n'est pas rationnelle	252
4.28. Un cas simple du lemme de Sard	253
4.29. Théorème de Darboux	254
4.30. Sur la formule des accroissements finis	256
4.31. Maximum local	257
4.32. Dénombrabilité des maxima locaux	259

4.33. Majoration de $f^2 + f'^2$	260
4.34. Interpolation par splines cubiques	260
4.35. Interpolation d'Hermite	264
4.36. Dérivées dominées par un polynôme	266
4.37. Une généralisation du théorème de Rolle	267
4.38. Minoration de la dérivée seconde	268
4.39. Zéros des dérivées successives	269
4.40. Théorème de Glaeser pour une variable (1963)	270
4.41. Étude du maximum de $f \mapsto f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)$	272
4.42. Puissances entières	273
4.43. Inégalités de Kolmogorov	274
4.44. Théorème de division	277
4.45. Le théorème de réalisation de Borel	279
4.46. Théorème de Whitney	282
4.47. Convexité	284
4.48. Inégalité de convexité (1)	285
4.49. Inégalité de convexité (2)	285
4.50. Condition suffisante de convexité	286
4.51. Minimum d'une fonction convexe	287
4.52. Intervalle de monotonie d'une fonction strictement convexe	288
4.53. Étude asymptotique d'une fonction convexe	289
4.54. Combinaison convexe positive	290
4.55. Fonctions à variation bornée	292
4.56. Un développement asymptotique	294
4.57. Estimation du maximum d'une fonction polynôme	296
4.58. Dérivation d'équivalents	299
4.59. Intégration d'équivalents	301
Table des matières	303
Index	309