Daniel W. Stroock

## Essentials of Integration Theory for Analysis



## Contents

Preface	•	·	·	·	. v
Chapter 1 The Classical Theory					. 1
1.1 Riemann Integration					. 1
Exercises for $\S1.1$					. 7
1.2 Riemann–Stieltjes Integration					. 8
1.2.1. Riemann Integrability					. 9
1.2.2. Functions of Bounded Variation					12
Exercises for $\S1.2$					18
1.3 Rate of Convergence					20
1.3.1. Periodic Functions					20
1.3.2. The Non-Periodic Case					25
Exercises for §1.3 $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$		•		•	27
Chaptor 2 Monsures					າຊ
	•	•	·	•	20
2.1 Some Generalities	·	•	·	·	28
2.1.1. The Idea	·	·	·	·	28
2.1.2. Measures and Measure Spaces	·	·	·	·	30
Exercises for $\S 2.1$	•	•	·	•	36
2.2 A Construction of Measures	•	•	·	•	39
2.2.1. A Construction Procedure	•	•	·	•	39
2.2.2. Lebesgue Measure on $\mathbb{R}^N$	•	•	•	·	45
2.2.3. Distribution Functions and Measures	•	·	•	·	50
2.2.4. Bernoulli Measure	•	•	•	•	51
2.2.5. Bernoulli and Lebesgue Measures	•	•	•	•	55
Exercises for $\S 2.2$	٠	•	·	•	57
Chapter 3 Lebesgue Integration	•		•		62
3.1 The Lebesgue Integral					62
3.1.1. Some Miscellaneous Preliminaries					62
3.1.2. The Space $L^1(\mu; \mathbb{R})$					70
Exercises for $\S3.1$					71
3.2 Convergence of Integrals					73
3.2.1. The Big Three Convergence Results					74
3.2.2. Convergence in Measure					77
3.2.3. Elementary Properties of $L^1(\mu; \mathbb{R})$					82

Contento
----------

Exercises for $\S 3.2$						84
3.3 Lebesgue's Differentiation Theorem						87
3.3.1. The Sunrise Lemma						87
3.3.2. The Absolutely Continuous Case				•		89
3.3.3. The General Case				•		94
Exercises for $\S3.3$	•	•	•	•	•	96
Chapter 4 Products of Measures						100
4.1 Fubini's Theorem						100
Exercises for $\S4.1$						104
4.2 Steiner Symmetrization			•			106
4.2.1. The Isodiametric inequality						106
4.2.2. Hausdorff's Description of Lebesgue's Measure						108
Exercises for $\S4.2$						112
0						
Chapter 5 Changes of Variable	•					113
5.1 Riemann vs. Lebesgue, Distributions, and Polar Coord	ina	tes	5			113
5.1.1. Riemann vs. Lebesgue						113
5.1.2. Polar Coordinates						117
Exercises for $\S5.1$						119
5.2 Jacobi's Transformation and Surface Measure	•				•	121
5.2.1. Jacobi's Transformation Formula	•					121
5.2.2. Surface Measure						124
Exercises for $\S5.2$	•					132
5.3 The Divergence Theorem						137
5.3.1. Flows Generated by Vector Fields	•					137
5.3.2. Mass Transport						139
Exercises for $\S5.3$	•		•		•	142
Chapter 6 Basic Inequalities and Lebesgue Spaces						146
6.1 Jonson Minkowski and Hölder		•	•		·	146
Evension for \$6.1	•	•	•	•	•	140
6.2 The Lebergue Spreed	·	•	•	·	·	152
0.2 The Lebesgue Spaces	·	·	·	·	•	150
$\begin{array}{c} \text{0.2.1. The } L \text{ -spaces } \dots $	•	•	•	·	·	150
5.2.2. Mixed Lebesgue Spaces	•	•	•	•	•	100
Exercises for § 0.2	•	•	•	·	•	101
6.3 Some Elementary Transformations on Lebesgue Spaces	•	·	·	·	٠	103
6.2.2. Convolutions and Young's incomplity	٠	·	·	·	·	105
6.2.2. Evidentialized Molliform	•	·	·	•	·	160
$0.3.3. \text{ Friedrichs Molliners} \dots \dots$	٠	·	•	·	·	108
Exercises for 90.3	•	•		·	•	111

· · x

## Contents

Chapter 7 Hilbert Space and Elements of	F	ου	irie	er	Α	nə	ιly	si	s		•	174
7.1 Hilbert Space												174
7.1.1. Elementary Theory of Hilbert Spaces												174
7.1.2. Orthogonal Projection and Bases		•										177
Exercises for $\S7.1$												183
7.2 Fourier Series												184
7.2.1. The Fourier Basis										•		184
7.2.2. An Application to Euler–Maclaurin .												188
Exercises for $\S7.2$		•		•	•	•	•	•				190
7.3 The Fourier Transform												191
7.3.1. $L^1$ -Theory of the Fourier Transform .	•		•	•	•		•	•		·		191
7.3.2. The Hermite Functions	•	•	•	٠	•	•	٠	•	·	·	•	194
7.3.3. $L^2$ -Theory of the Fourier Transform .	·	·	•	·	·	·	·	·		•	•	198
Exercises for $\S7.3$	•	·	·	•	•	•	·	•	•	٠	•	201
Chapter 8 The Radon–Nikodym Theorem and Carathéodory's Extensio	n, on	Da T	ani he	el or	l I en	int n	eg:	gra	ati	.01	л,	203
8.1 The Radon–Nikodym Theorem		•	•	•	•	•	•	•		•		203
Exercises for $\S 8.1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	•	•	•	•	·	•	·	•	•	•	·	206
8.2 The Daniell Integral	·	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	208
8.2.1. Extending an Integration Theory	·	·	•	•	·	·	·	·	•	•	·	209
8.2.2. Identification of the Measure	•	•	·	·	·	·	·	·	·	•	·	213
8.2.3. An Extension Theorem	·	٠	·	·	·	·	·	·	·	·	·	215
8.2.4. Another Riesz Representation Theorem	1	٠	·	•	·	•	•	·	•	·	·	217
Exercises for $\S 8.2$	·	•	·	•	·	·	·	•	·	•	·	219
8.3 Caratheodory's Method	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	•	220
8.3.1. Outer Measures and Measurability	•	٠	•	·	·	·	·	·	•	·	·	220
8.3.2. Caratheodory's Criterion	•	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	223
8.3.3. Hausdorff Measures	•	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	224
8.3.4. Hausdorff Measure and Surface Measure Examises for $1.8.2$	re	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	220
Exercises for $98.3$	•	•	·	•	·	·	·	•	•	·	·	202
Notation .	•		•	•	•	•	•	•	•			235
Index												239