

Vladimir A. Zorich

---

# Analysis II

Übersetzt von Josef Schüle

Mit 40 Abbildungen

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>9</b>	<b>*Stetige Abbildungen (Allgemeine Theorie)</b> .....	<b>1</b>
9.1	Metrische Räume .....	1
9.1.1	Definition und Beispiele .....	1
9.1.2	Offene und abgeschlossene Teilmengen metrischer Räume .....	5
9.1.3	Unterräume eines metrischen Raumes .....	7
9.1.4	Das direkte Produkt metrischer Räume .....	8
9.1.5	Übungen und Aufgaben .....	9
9.2	Topologische Räume .....	10
9.2.1	Grundlegende Definitionen .....	10
9.2.2	Teilräume von topologischen Räumen .....	14
9.2.3	Das direkte Produkt topologischer Räume .....	14
9.2.4	Übungen und Aufgaben .....	15
9.3	Kompakte Mengen .....	16
9.3.1	Definition und allgemeine Eigenschaften kompakter Mengen .....	16
9.3.2	Metrische kompakte Mengen .....	18
9.3.3	Übungen und Aufgaben .....	20
9.4	Zusammenhängende topologische Räume .....	20
9.4.1	Übungen und Aufgaben .....	22
9.5	Vollständige metrische Räume .....	23
9.5.1	Grundlegende Definitionen und Beispiele .....	23
9.5.2	Die Vervollständigung eines metrischen Raumes .....	26
9.5.3	Übungen und Aufgaben .....	30
9.6	Stetige Abbildungen topologischer Räume .....	30
9.6.1	Der Grenzwert einer Abbildung .....	31
9.6.2	Stetige Abbildungen .....	33
9.6.3	Übungen und Aufgaben .....	36
9.7	Das Prinzip einer kontrahierenden Abbildung .....	37
9.7.1	Übungen und Aufgaben .....	43

<b>10</b>	<b>*Differentialrechnung aus einem allgemeinen Blickwinkel</b>	<b>45</b>
10.1	Normierte Vektorräume	45
10.1.1	Einige Beispiele von Vektorräumen in der Analysis	45
10.1.2	Normen in Vektorräumen	46
10.1.3	Innere Produkte in Vektorräumen	49
10.1.4	Übungen und Aufgaben	52
10.2	Lineare und multilineare Transformationen	53
10.2.1	Definitionen und Beispiele	53
10.2.2	Die Norm einer Transformation	56
10.2.3	Der Raum der stetigen Transformationen	60
10.2.4	Übungen und Aufgaben	64
10.3	Das Differential einer Abbildung	65
10.3.1	In einem Punkt differenzierbare Abbildungen	65
10.3.2	Die allgemeinen Ableitungsregeln	67
10.3.3	Einige Beispiele	68
10.3.4	Die partielle Ableitung einer Abbildung	75
10.3.5	Übungen und Aufgaben	76
10.4	Der Mittelwertsatz mit Anwendungen	78
10.4.1	Der Mittelwertsatz	78
10.4.2	Einige Anwendungen des Mittelwertsatzes	80
10.4.3	Übungen und Aufgaben	84
10.5	Ableitungen höherer Ordnung	84
10.5.1	Definition des $n$ -ten Differentials	84
10.5.2	Ableitung nach einem Vektor	86
10.5.3	Symmetrie der Differentiale höherer Ordnung	87
10.5.4	Einige Anmerkungen	89
10.5.5	Übungen und Aufgaben	91
10.6	Die Taylorsche Formel und die Untersuchung von Extrema	91
10.6.1	Die Taylorsche Formel für Abbildungen	91
10.6.2	Methode zur Untersuchung innerer Extrema	92
10.6.3	Einige Beispiele	94
10.6.4	Übungen und Aufgaben	99
10.7	Der verallgemeinerte Satz zur impliziten Funktion	101
10.7.1	Übungen und Aufgaben	110
<b>11</b>	<b>Mehrfachintegrale</b>	<b>113</b>
11.1	Das Riemannsche Integral über einem $n$ -dimensionalen Intervall	113
11.1.1	Definition des Integrals	113
11.1.2	Das Kriterium nach Lebesgue für die Riemann- Integrierbarkeit	116
11.1.3	Das Kriterium nach Darboux	121
11.1.4	Übungen und Aufgaben	123
11.2	Das Integral über einer Menge	124
11.2.1	Zulässige Mengen	124

11.2.2	Das Integral über einer Menge	125
11.2.3	Das Maß (Volumen) einer zulässigen Menge	126
11.2.4	Übungen und Aufgaben	128
11.3	Allgemeine Eigenschaften des Integrals	129
11.3.1	Das Integral als lineares Funktional	129
11.3.2	Additivität des Integrals	130
11.3.3	Abschätzungen für das Integral	131
11.3.4	Übungen und Aufgaben	133
11.4	Umformung eines Mehrfachintegrals in iterierte Integrale	134
11.4.1	Satz von Fubini	134
11.4.2	Einige Korollare	137
11.4.3	Übungen und Aufgaben	141
11.5	Substitution in einem Mehrfachintegral	142
11.5.1	Problemstellung. Heuristische Betrachtungen	142
11.5.2	Messbare Mengen und glatte Abbildungen	144
11.5.3	Der ein-dimensionale Fall	146
11.5.4	Der Fall eines einfachen Diffeomorphismus in $\mathbb{R}^n$	149
11.5.5	Verkettete Abbildungen und Substitution	150
11.5.6	Additivität des Integrals	151
11.5.7	Verallgemeinerungen der Substitutionsformel	152
11.5.8	Übungen und Aufgaben	156
11.6	Uneigentliche Mehrfachintegrale	159
11.6.1	Grundlegende Definitionen	159
11.6.2	Der Vergleichstest	162
11.6.3	Substitution in einem uneigentlichen Integral	165
11.6.4	Übungen und Aufgaben	168
<b>12</b>	<b>Mannigfaltigkeiten und Differentialformen in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>171</b>
12.1	Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$	171
12.1.1	Übungen und Aufgaben	180
12.2	Orientierung einer Mannigfaltigkeit	181
12.2.1	Übungen und Aufgaben	188
12.3	Der Rand einer Mannigfaltigkeit und seine Orientierung	189
12.3.1	Berandete Mannigfaltigkeiten	189
12.3.2	Die induzierte Orientierung auf dem Rand	192
12.3.3	Übungen und Aufgaben	196
12.4	Die Fläche einer Mannigfaltigkeit im euklidischen Raum	197
12.4.1	Übungen und Aufgaben	204
12.5	Einfache Tatsachen über Differentialformen	207
12.5.1	Differentialformen: Definition und Beispiele	208
12.5.2	Koordinatendarstellung einer Differentialform	212
12.5.3	Das äußere Differential einer Form	214
12.5.4	Transformation unter Abbildungen	217
12.5.5	Formen auf Mannigfaltigkeiten	221
12.5.6	Übungen und Aufgaben	222

<b>13</b>	<b>Linien- und Flächenintegrale</b> .....	225
13.1	Das Integral einer Differentialform .....	225
13.1.1	Das Ausgangsproblem. Beispiele .....	225
13.1.2	Integral über einer orientierten Fläche .....	232
13.1.3	Übungen und Aufgaben .....	236
13.2	Das Volumenelement. Integrale der ersten und zweiten Art ...	241
13.2.1	Die Masse einer dünnen Schicht .....	241
13.2.2	Die Fläche einer Oberfläche als das Integral einer Form	242
13.2.3	Das Volumenelement .....	243
13.2.4	Kartesische Formulierung des Volumenelements .....	245
13.2.5	Integrale erster und zweiter Art .....	246
13.2.6	Übungen und Aufgaben .....	249
13.3	Die wichtigen Integralgleichungen der Analysis .....	252
13.3.1	Greensche-Formel .....	252
13.3.2	Der Divergenzatz .....	258
13.3.3	Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$ .....	261
13.3.4	Der allgemeine Satz von Stokes .....	264
13.3.5	Übungen und Aufgaben .....	267
<b>14</b>	<b>Elemente der Vektoranalysis und der Feldtheorie</b> .....	273
14.1	Die Differentialoperationen der Vektoranalysis .....	273
14.1.1	Skalare und Vektorfelder .....	273
14.1.2	Vektorfelder und Formen in $\mathbb{R}^3$ .....	273
14.1.3	Die Differentialoperatoren grad, rot, div, und $\nabla$ .....	276
14.1.4	Einige Differentialformeln der Vektoranalysis .....	279
14.1.5	*Vektoroperationen in krummlinigen Koordinaten .....	281
14.1.6	Übungen und Aufgaben .....	290
14.2	Die Integralformeln der Feldtheorie .....	292
14.2.1	Die klassischen Integralformeln in Vektorschreibweise ..	292
14.2.2	Die physikalische Interpretation von div, rot und grad ..	295
14.2.3	Weitere Integralformeln .....	299
14.2.4	Übungen und Aufgaben .....	302
14.3	Potentialfelder .....	304
14.3.1	Das Potential eines Vektorfeldes .....	304
14.3.2	Notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials	305
14.3.3	Kriterium damit ein Feld ein Potentialfeld ist .....	306
14.3.4	Topologische Struktur eines Gebiets und Potentiale ...	310
14.3.5	Vektorpotentiale. Exakte und geschlossene Formen ...	312
14.3.6	Übungen und Aufgaben .....	316
14.4	Anwendungsbeispiele .....	320
14.4.1	Die Wärmegleichung .....	320
14.4.2	Die Kontinuitätsgleichung .....	322
14.4.3	Gleichungen zur Dynamik kontinuierlicher Materie .....	324
14.4.4	Die Wellengleichung .....	326
14.4.5	Übungen und Aufgaben .....	327

<b>15</b>	<b>*Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>331</b>
15.1	Ein kurzer Rückblick zur linearen Algebra .....	331
15.1.1	Die Algebra der Formen .....	331
15.1.2	Die Algebra der schief-symmetrischen Formen .....	332
15.1.3	Lineare Abbildungen und ihre Adjungierte .....	335
15.1.4	Übungen und Aufgaben .....	337
15.2	Mannigfaltigkeiten .....	338
15.2.1	Definition einer Mannigfaltigkeit .....	338
15.2.2	Glatte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen .....	344
15.2.3	Orientierung einer Mannigfaltigkeit und ihres Randes ..	347
15.2.4	Zerlegungen der Eins. Mannigfaltigkeiten als Flächen ..	351
15.2.5	Übungen und Aufgaben .....	355
15.3	Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten ..	357
15.3.1	Der Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit in einem Punkt .....	357
15.3.2	Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit .....	361
15.3.3	Die äußere Ableitung .....	363
15.3.4	Das Integral einer Form über einer Mannigfaltigkeit ..	364
15.3.5	Die Stokesche Formel .....	366
15.3.6	Übungen und Aufgaben .....	368
15.4	Geschlossene und exakte Formen auf Mannigfaltigkeiten .....	374
15.4.1	Der Satz von Poincaré .....	374
15.4.2	Homologie und Kohomologie .....	377
15.4.3	Übungen und Aufgaben .....	383
<b>16</b>	<b>Gleichmäßige Konvergenz und Basisoperationen der Analysis</b> .....	<b>385</b>
16.1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz .....	385
16.1.1	Punktweise Konvergenz .....	385
16.1.2	Formulierung der fundamentalen Probleme .....	386
16.1.3	Konvergenz einer von einem Parameter abhängigen Familie .....	388
16.1.4	Das Cauchysche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz	392
16.1.5	Übungen und Aufgaben .....	393
16.2	Gleichmäßige Konvergenz einer Reihe von Funktionen .....	394
16.2.1	Grundlegende Definitionen. Gleichmäßige Konvergenz einer Reihe .....	394
16.2.2	Weierstraßscher <i>M</i> -Test auf gleichmäßige Konvergenz ..	397
16.2.3	Der Test nach Abel–Dirichlet .....	399
16.2.4	Übungen und Aufgaben .....	403
16.3	Funktionale Eigenschaften einer Grenzfunktion .....	404
16.3.1	Problembeschreibung .....	404
16.3.2	Bedingungen für die Vertauschbarkeit zweier Grenzwertübergänge .....	405
16.3.3	Stetigkeit und Grenzwertübergang .....	406

16.3.4	Integration und Grenzwertübergang	410
16.3.5	Differentiation und Grenzwertübergang	412
16.3.6	Übungen und Aufgaben	417
16.4	*Teilmengen des Raumes der stetigen Funktion	421
16.4.1	Der Satz von Arzelà–Ascoli	421
16.4.2	Der metrische Raum $C(K, Y)$	424
16.4.3	Der Satz von Weierstraß–Stone	425
16.4.4	Übungen und Aufgaben	428
<b>17</b>	<b>Parameterintegrale</b>	<b>431</b>
17.1	Eigentliche Parameterintegrale	431
17.1.1	Grundbegriffe	431
17.1.2	Stetigkeit des Integrals	432
17.1.3	Ableitung des Integrals	433
17.1.4	Integration des Integrals	437
17.1.5	Übungen und Aufgaben	438
17.2	Uneigentliche Parameterintegrale	440
17.2.1	Gleichmäßige Konvergenz bzgl. eines Parameters	440
17.2.2	Stetigkeit eines Parameterintegrals	448
17.2.3	Ableitung nach einem Parameter	451
17.2.4	Integration eines uneigentlichen Integrals	454
17.2.5	Übungen und Aufgaben	459
17.3	Die Eulerschen Integrale	462
17.3.1	Die Betafunktion	463
17.3.2	Die Gammafunktion	465
17.3.3	Der Zusammenhang zwischen der Beta- und der Gammafunktion	468
17.3.4	Beispiele	469
17.3.5	Übungen und Aufgaben	471
17.4	Faltung und verallgemeinerte Funktionen	475
17.4.1	Faltung bei physikalischen Problemen	475
17.4.2	Allgemeine Eigenschaften einer Faltung	477
17.4.3	Näherungsgleichungen und der Satz von Weierstraß	481
17.4.4	*Elementare Konzepte rund um Distributionen	487
17.4.5	Übungen und Aufgaben	498
17.5	Mehrfache Parameterintegrale	504
17.5.1	Eigentliche mehrfache Parameterintegrale	504
17.5.2	Uneigentliche Mehrfachintegrale	505
17.5.3	Uneigentliche Integrale mit einer veränderlichen Singularität	506
17.5.4	*Faltung im mehr-dimensionalen Fall	511
17.5.5	Übungen und Aufgaben	522

<b>18</b>	<b>Fourier-Reihen und die Fourier-Transformation</b> .....	527
18.1	Allgemeine Grundbegriffe zu Fourier-Reihen .....	527
18.1.1	Orthogonale Funktionensysteme .....	527
18.1.2	Fourier-Koeffizienten und Fourier-Reihen .....	534
18.1.3	*Eine Quelle für orthogonale Systeme .....	546
18.1.4	Übungen und Aufgaben .....	550
18.2	Trigonometrische Fourier-Reihen .....	556
18.2.1	Wichtige Konvergenzarten klassischer Fourier-Reihen ..	556
18.2.2	Punktweise Konvergenz einer Fourier-Reihe .....	562
18.2.3	Glattheit und Abnahme der Fourier-Koeffizienten ....	572
18.2.4	Vollständigkeit des trigonometrischen Systems .....	577
18.2.5	Übungen und Aufgaben .....	584
18.3	Die Fourier-Transformation .....	592
18.3.1	Fourier-Integraldarstellung .....	592
18.3.2	Differentialeigenschaften und die Fourier-Transformierte	606
18.3.3	Die wichtigsten strukturellen Eigenschaften .....	609
18.3.4	Beispiele und Anwendungen .....	615
18.3.5	Übungen und Aufgaben .....	621
<b>19</b>	<b>Asymptotische Entwicklungen</b> .....	629
19.1	Asymptotische Formeln und asymptotische Reihen .....	631
19.1.1	Grundlegende Definitionen .....	631
19.1.2	Allgemeine Tatsachen zu asymptotischen Reihen .....	637
19.1.3	Asymptotische Potenzreihen .....	641
19.1.4	Übungen und Aufgaben .....	644
19.2	Die Asymptotik von Integralen (die Laplacesche Methode) ...	647
19.2.1	Die Idee hinter der Laplaceschen Methode .....	647
19.2.2	Das Lokalisierungsprinzip für ein Laplace-Integral ....	650
19.2.3	Kanonische Integrale und ihr asymptotisches Verhalten .	652
19.2.4	Asymptotik eines Laplace-Integrals .....	656
19.2.5	*Asymptotische Entwicklungen von Laplace-Integralen .	659
19.2.6	Übungen und Aufgaben .....	671
	<b>Themen und Fragen für Halbjahresprüfungen</b> .....	679
1.	Reihen und parameterabhängige Integrale .....	679
2.	Empfohlene Aufgaben für die Halbjahresprüfungen .....	680
3.	Integralberechnungen (mehrere Variable) .....	682
4.	Empfohlene Aufgaben für das Studium der Halbjahresthemen ...	683
	<b>Prüfungsgebiete</b> .....	685
1.	Reihen und parameterabhängige Integrale .....	685
2.	Integralrechnung (Mehrere Variable) .....	686

<b>Literaturverzeichnis</b> .....	689
1. Klassische Werke .....	689
1.1 Hauptquellen .....	689
1.2 Wichtige umfassende grundlegende Werke .....	689
1.3 Klassische Vorlesungen in Analysis aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts .....	689
2. Lehrbücher .....	690
3. Studienunterlagen .....	690
4. Weiterführende Literatur .....	691
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	693
<b>Sachverzeichnis</b> .....	697
<b>Namensverzeichnis</b> .....	707