

Wolfgang Arendt    Karsten Urban

# Partielle Differenzialgleichungen

Eine Einführung in analytische und  
numerische Methoden

**Spektrum**  
AKADEMISCHER VERLAG



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Modellierung oder wie man auf eine Differenzialgleichung kommt</b>	<b>1</b>
1.1	Mathematische Modellierung	2
1.2	Transportprozesse	4
1.3	Diffusion	8
1.4	Die Wellengleichung	9
1.5	Die Black-Scholes-Gleichung	11
1.6	Jetzt wird es mehrdimensional	17
1.7*	Es gibt noch mehr	22
1.8	Klassifikation partieller Differenzialgleichungen	28
1.9*	Kommentare zu Kapitel 1	29
1.10	Aufgaben	30
<b>2</b>	<b>Kategorisierung und Charakteristiken</b>	<b>33</b>
2.1	Charakteristiken von Anfangswertproblemen auf $\mathbb{R}$	34
2.2	Gleichungen zweiter Ordnung	43
2.3*	Nichtlineare Gleichungen zweiter Ordnung	47
2.4*	Gleichungen höherer Ordnung und Systeme	48
2.5	Aufgaben	49
<b>3</b>	<b>Elementare Lösungsmethoden</b>	<b>53</b>
3.1	Die eindimensionale Wellengleichung	54
3.2	Fourier-Reihen	58
3.3	Die Laplace-Gleichung	65
3.4	Die Wärmeleitungsgleichung	75
3.5	Die Black-Scholes-Gleichung	89
3.6	Integraltransformationen	95
3.7	Ausblick	106
3.8	Aufgaben	108
<b>4</b>	<b>Hilbert-Räume</b>	<b>111</b>
4.1	Unitäre Räume	112
4.2	Orthonormalbasen	115
4.3	Vollständigkeit	119
4.4	Orthogonale Projektionen	120
4.5	Linearformen und Bilinearformen	122
4.6	Schwache Konvergenz	126
4.7	Stetige und kompakte Operatoren	129
4.8	Der Spektralsatz	130

4.9*	Kommentare zu Kapitel 4 . . . . .	138
4.10	Aufgaben . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Sobolev-Räume und Randwertaufgaben in einer Dimension</b>	<b>143</b>
5.1	Sobolev-Räume in einer Variablen . . . . .	144
5.2	Randwertprobleme auf einem Intervall . . . . .	152
5.3*	Kommentare zu Kapitel 5 . . . . .	161
5.4	Aufgaben . . . . .	161
<b>6</b>	<b>Hilbert-Raum-Methoden für elliptische Gleichungen</b>	<b>165</b>
6.1	Regularisierung . . . . .	166
6.2	Sobolev-Räume über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . . . . .	172
6.3	Der Raum $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	179
6.4	Die Verbandsoperationen auf $H^1(\Omega)$ . . . . .	182
6.5	Die Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	185
6.6	Sobolev-Räume und Fourier-Transformation . . . . .	188
6.7	Lokale Regularität . . . . .	193
6.8	Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	198
6.9	Das Dirichlet-Problem . . . . .	201
6.10	Elliptische Gleichungen mit Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	209
6.11	$H^2$ -Regularität . . . . .	211
6.12*	Kommentare zu Kapitel 6 . . . . .	214
6.13	Aufgaben . . . . .	215
<b>7</b>	<b>Neumann- und Robin-Randbedingungen</b>	<b>219</b>
7.1	Der Satz von Gauß . . . . .	220
7.2	Beweis des Satzes von Gauß . . . . .	225
7.3	Die Fortsetzungseigenschaft . . . . .	230
7.4	Die Poisson-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen . . . . .	235
7.5	Der Spursatz und Robin-Randbedingungen . . . . .	238
7.6*	Kommentare zu Kapitel 7 . . . . .	241
7.7	Aufgaben . . . . .	242
<b>8</b>	<b>Spektralzerlegung und Evolutionsgleichungen</b>	<b>245</b>
8.1	Ein vektorwertiges Anfangswertproblem . . . . .	246
8.2	Die Wärmeleitungsgleichung: Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	249
8.3	Die Wärmeleitungsgleichung: Robin-Randbedingungen . . . . .	255
8.4	Die Wellengleichung . . . . .	257
8.5	Inhomogene Evolutionsgleichungen . . . . .	262
8.6*	Kommentare zu Kapitel 8 . . . . .	268
8.7	Aufgaben . . . . .	268
<b>9</b>	<b>Numerische Verfahren</b>	<b>271</b>
9.1	Finite Differenzen . . . . .	273
9.2	Finite Elemente . . . . .	287
9.3*	Ergänzungen und Erweiterungen . . . . .	309
9.4	Parabolische Probleme . . . . .	311

---

9.5*	Kommentare zu Kapitel 9 . . . . .	322
9.6	Aufgaben . . . . .	323
<b>10</b>	<b>Maple® oder manchmal hilft der Computer</b>	<b>327</b>
10.1	Maple® . . . . .	328
10.2	Aufgaben . . . . .	333
<b>Anhang</b>		<b>337</b>
A.1	Banach-Räume und lineare Operatoren . . . . .	337
A.2	Der Raum $C(K)$ . . . . .	339
A.3	Integration . . . . .	339