

Manfred Dobrowolski

# Angewandte Funktionalanalysis

Funktionalanalysis, Sobolev-Räume  
und elliptische Differentialgleichungen

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Topologische und metrische Räume</b>	1
1.1	Topologische Räume und stetige Abbildungen	1
1.2	Metrische Räume	6
1.3	Der Banachsche Fixpunktsatz	9
1.4	Kompakte Räume	12
<b>2</b>	<b>Banach- und Hilbert-Räume</b>	17
2.1	Banach-Räume	17
2.2	Endlich dimensionale Räume	19
2.3	Stetige lineare Abbildungen und der normierte Dualraum	21
2.4	Hilbert-Räume	26
2.5	Räume stetiger Funktionen und der Satz von Arzela-Ascoli	31
2.6	Die Hölder-Räume $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$	34
<b>3</b>	<b>Die Prinzipien der Funktionalanalysis</b>	41
3.1	Der Satz von Baire und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	41
3.2	Das Prinzip der offenen Abbildung	43
3.3	Hahn-Banach-Sätze	45
3.4	Lokalkonvexe topologische Vektorräume	48
3.5	Bidualraum und schwache Topologien	51
3.6	Schwache Folgenkompaktheit und reflexive Räume	55
3.7	Konvexität und schwache Topologie	58
<b>4</b>	<b>Die Lebesgue-Räume <math>L^p(\Omega)</math></b>	65
4.1	Das Lebesgue-Integral	65
4.2	Definition der Räume $L^p(\Omega)$	69
4.3	Mollifier und dichte Unterräume	72
4.4	Konvergenzeigenschaften von Folgen meßbarer Funktionen	75
4.5	Der Dualraum von $L^p(\Omega)$	77

<b>5</b>	<b>Die Sobolev-Räume <math>H^{m,p}(\Omega)</math></b>	85
5.1	Das Fundamentallemma der Variationsrechnung	85
5.2	Schwache Ableitungen	86
5.3	Definition und grundlegende Eigenschaften der Sobolev-Räume	89
5.4	Produkt- und Kettenregel	93
5.5	Differenzenquotienten und schwache Differenzierbarkeit von Lipschitzfunktionen	95
<b>6</b>	<b>Fortsetzungs- und Einbettungssätze für Sobolev-Funktionen</b>	99
6.1	Gebiete	99
6.2	$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $H^{m,p}(\Omega)$	102
6.3	Transformationssätze	102
6.4	Fortsetzungssätze	104
6.5	Einbettungen in $L^q(\Omega)$	106
6.6	Randwerte von Sobolev-Funktionen	108
6.7	Kompakte Einbettungen in $L^q(\Omega)$	113
6.8	Einbettungen in Räume stetiger Funktionen	117
6.9	Dualräume von $H^{m,p}(\Omega)$ und die Räume $H^{-m,q}(\Omega)$	119
6.10	Die gebrochenen Sobolev-Räume $H^{s,p}(\Omega)$	121
<b>7</b>	<b>Elliptische Differentialgleichungen</b>	131
7.1	Starke und schwache Lösungen der Poisson-Gleichung	131
7.2	Existenz von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen	134
7.3	Die Differenzenquotienten-Technik	136
7.4	Regularität auf konvexen Gebieten	140
7.5	Maximumprinzipien	143
7.6	Die Verfahren von Ritz und Galerkin	147
7.7	Finite Elemente	149
<b>8</b>	<b>Einführung in die Operatorenrechnung und Spektraltheorie</b>	159
8.1	Spektrum und Resolventenmenge	159
8.2	Struktur der Resolventenmenge und des Resolventenoperators	161
8.3	Kompakte Operatoren	163
8.4	Adjungierte Operatoren, Annihilatoren und Gelfandscher Dreier	164
8.5	Quotientenräume	171
8.6	Operatoren mit abgeschlossenem Bild	172
8.7	Fredholm-Operatoren und die Spektraltheorie kompakter Operatoren	176
8.8	Integralgleichungen	179
8.9	Gårdingsche Ungleichung	180
8.10	Das abstrakte Eigenwertproblem	184
8.11	Das Eigenwertproblem für den Laplace Operator	189
8.12	Zur Klassifikation partieller Differentialgleichungen	194

<b>9</b>	<b>Distributionen und Fourier-Transformation</b> .....	199
9.1	Distributionen .....	199
9.2	Die Fourier-Transformation in $\mathcal{S}$ .....	208
9.3	Die Fourier-Transformation in $\mathcal{S}'$ und in $L^2$ .....	212
9.4	Sobolev-Räume und Fourier-Transformation, Spurräume .....	215
9.5	Die Gårdingsche Ungleichung für elliptische Operatoren .....	223
<b>A</b>	<b>Anhang</b> .....	231
A.1	Konvexität und elementare Ungleichungen .....	231
A.2	Fortsetzung stetiger Funktionen .....	233
A.3	Der Weierstraßsche Approximationssatz .....	235
A.4	Der lokalkonvexe Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ .....	236
A.5	Harmonische Funktionen und der Satz von Liouville .....	237
A.6	Polarkoordinaten .....	239
A.7	Reelle und komplexe Vektorräume .....	240
	<b>Lösungen</b> .....	241
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	253
	<b>Symbolverzeichnis</b> .....	257
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	261