Vladimir A. Zorich



# Analysis II

Übersetzt von Josef Schüle

Mit 40 Abbildungen

Springer

# Inhaltsverzeichnis


9 ***Stetige Abbildungen (Allgemeine Theorie)** ... 1
- 9.1 Metrische Räume ... 1
  - 9.1.1 Definition und Beispiele ... 1
  - 9.1.2 Offene und abgeschlossene Teilmengen metrischer Räume ... 5
  - 9.1.3 Unterräume eines metrischen Raumes ... 7
  - 9.1.4 Das direkte Produkt metrischer Räume ... 8
  - 9.1.5 Übungen und Aufgaben ... 9
- 9.2 Topologische Räume ... 10
  - 9.2.1 Grundlegende Definitionen ... 10
  - 9.2.2 Teilräume von topologischen Räumen ... 14
  - 9.2.3 Das direkte Produkt topologischer Räume ... 14
  - 9.2.4 Übungen und Aufgaben ... 15
- 9.3 Kompakte Mengen ... 16
  - 9.3.1 Definition und allgemeine Eigenschaften kompakter Mengen ... 16
  - 9.3.2 Metrische kompakte Mengen ... 18
  - 9.3.3 Übungen und Aufgaben ... 20
- 9.4 Zusammenhängende topologische Räume ... 20
  - 9.4.1 Übungen und Aufgaben ... 22
- 9.5 Vollständige metrische Räume ... 23
  - 9.5.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele ... 23
  - 9.5.2 Die Vervollständigung eines metrischen Raumes ... 26
  - 9.5.3 Übungen und Aufgaben ... 30
- 9.6 Stetige Abbildungen topologischer Räume ... 30
  - 9.6.1 Der Grenzwert einer Abbildung ... 31
  - 9.6.2 Stetige Abbildungen ... 33
  - 9.6.3 Übungen und Aufgaben ... 36
- 9.7 Das Prinzip einer kontrahierenden Abbildung ... 37
  - 9.7.1 Übungen und Aufgaben ... 43

**10 *Differentialrechnung aus einem allgemeinen Blickwinkel** .. 45
10.1 Normierte Vektorräume ... 45
10.1.1 Einige Beispiele von Vektorräumen in der Analysis ... 45
10.1.2 Normen in Vektorräumen ... 46
10.1.3 Innere Produkte in Vektorräumen ... 49
10.1.4 Übungen und Aufgaben ... 52
10.2 Lineare und multilineare Transformationen ... 53
10.2.1 Definitionen und Beispiele ... 53
10.2.2 Die Norm einer Transformation ... 56
10.2.3 Der Raum der stetigen Transformationen ... 60
10.2.4 Übungen und Aufgaben ... 64
10.3 Das Differential einer Abbildung ... 65
10.3.1 In einem Punkt differenzierbare Abbildungen ... 65
10.3.2 Die allgemeinen Ableitungsregeln ... 67
10.3.3 Einige Beispiele ... 68
10.3.4 Die partielle Ableitung einer Abbildung ... 75
10.3.5 Übungen und Aufgaben ... 76
10.4 Der Mittelwertsatz mit Anwendungen ... 78
10.4.1 Der Mittelwertsatz ... 78
10.4.2 Einige Anwendungen des Mittelwertsatzes ... 80
10.4.3 Übungen und Aufgaben ... 84
10.5 Ableitungen höherer Ordnung ... 84
10.5.1 Definition des $n$-ten Differentials ... 84
10.5.2 Ableitung nach einem Vektor ... 86
10.5.3 Symmetrie der Differentiale höherer Ordnung ... 87
10.5.4 Einige Anmerkungen ... 89
10.5.5 Übungen und Aufgaben ... 91
10.6 Die Taylorsche Formel und die Untersuchung von Extrema ... 91
10.6.1 Die Taylorsche Formel für Abbildungen ... 91
10.6.2 Methode zur Untersuchung innerer Extrema ... 92
10.6.3 Einige Beispiele ... 94
10.6.4 Übungen und Aufgaben ... 99
10.7 Der verallgemeinerte Satz zur impliziten Funktion ... 101
10.7.1 Übungen und Aufgaben ... 110

**11 Mehrfachintegrale** ... 113
11.1 Das Riemannsche Integral über einem $n$-dimensionalen Intervall ... 113
11.1.1 Definition des Integrals ... 113
11.1.2 Das Kriterium nach Lebesgue für die Riemann-Integrierbarkeit ... 116
11.1.3 Das Kriterium nach Darboux ... 121
11.1.4 Übungen und Aufgaben ... 123
11.2 Das Integral über einer Menge ... 124
11.2.1 Zulässige Mengen ... 124

11.2.2 Das Integral über einer Menge ... 125
11.2.3 Das Maß (Volumen) einer zulässigen Menge ... 126
11.2.4 Übungen und Aufgaben ... 128
11.3 Allgemeine Eigenschaften des Integrals ... 129
11.3.1 Das Integral als lineares Funktional ... 129
11.3.2 Additivität des Integrals ... 130
11.3.3 Abschätzungen für das Integral ... 131
11.3.4 Übungen und Aufgaben ... 133
11.4 Umformung eines Mehrfachintegrals in iterierte Integrale ... 134
11.4.1 Satz von Fubini ... 134
11.4.2 Einige Korollare ... 137
11.4.3 Übungen und Aufgaben ... 141
11.5 Substitution in einem Mehrfachintegral ... 142
11.5.1 Problemstellung. Heuristische Betrachtungen ... 142
11.5.2 Messbare Mengen und glatte Abbildungen ... 144
11.5.3 Der ein-dimensionale Fall ... 146
11.5.4 Der Fall eines einfachen Diffeomorphismus in $\mathbb{R}^n$ ... 149
11.5.5 Verkettete Abbildungen und Substitution ... 150
11.5.6 Additivität des Integrals ... 151
11.5.7 Verallgemeinerungen der Substitutionsformel ... 152
11.5.8 Übungen und Aufgaben ... 156
11.6 Uneigentliche Mehrfachintegrale ... 159
11.6.1 Grundlegende Definitionen ... 159
11.6.2 Der Vergleichstest ... 162
11.6.3 Substitution in einem uneigentlichen Integral ... 165
11.6.4 Übungen und Aufgaben ... 168

**12 Mannigfaltigkeiten und Differentialformen in $\mathbb{R}^n$ ... 171**
12.1 Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$ ... 171
12.1.1 Übungen und Aufgaben ... 180
12.2 Orientierung einer Mannigfaltigkeit ... 181
12.2.1 Übungen und Aufgaben ... 188
12.3 Der Rand einer Mannigfaltigkeit und seine Orientierung ... 189
12.3.1 Berandete Mannigfaltigkeiten ... 189
12.3.2 Die induzierte Orientierung auf dem Rand ... 192
12.3.3 Übungen und Aufgaben ... 196
12.4 Die Fläche einer Mannigfaltigkeit im euklidischen Raum ... 197
12.4.1 Übungen und Aufgaben ... 204
12.5 Einfache Tatsachen über Differentialformen ... 207
12.5.1 Differentialformen: Definition und Beispiele ... 208
12.5.2 Koordinatendarstellung einer Differentialform ... 212
12.5.3 Das äußere Differential einer Form ... 214
12.5.4 Transformation unter Abbildungen ... 217
12.5.5 Formen auf Mannigfaltigkeiten ... 221
12.5.6 Übungen und Aufgaben ... 222

**13 Linien- und Flächenintegrale** ... 225
13.1 Das Integral einer Differentialform ... 225
13.1.1 Das Ausgangsproblem. Beispiele ... 225
13.1.2 Integral über einer orientierten Fläche ... 232
13.1.3 Übungen und Aufgaben ... 236
13.2 Das Volumenelement. Integrale der ersten und zweiten Art ... 241
13.2.1 Die Masse einer dünnen Schicht ... 241
13.2.2 Die Fläche einer Oberfläche als das Integral einer Form 242
13.2.3 Das Volumenelement ... 243
13.2.4 Kartesische Formulierung des Volumenelements ... 245
13.2.5 Integrale erster und zweiter Art ... 246
13.2.6 Übungen und Aufgaben ... 249
13.3 Die wichtigen Integralgleichungen der Analysis ... 252
13.3.1 Greensche–Formel ... 252
13.3.2 Der Divergenzsatz ... 258
13.3.3 Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$ ... 261
13.3.4 Der allgemeine Satz von Stokes ... 264
13.3.5 Übungen und Aufgaben ... 267

**14 Elemente der Vektoranalysis und der Feldtheorie** ... 273
14.1 Die Differentialoperationen der Vektoranalysis ... 273
14.1.1 Skalare und Vektorfelder ... 273
14.1.2 Vektorfelder und Formen in $\mathbb{R}^3$ ... 273
14.1.3 Die Differentialoperatoren grad, rot, div, und $\nabla$ ... 276
14.1.4 Einige Differentialformeln der Vektoranalysis ... 279
14.1.5 *Vektoroperationen in krummlinigen Koordinaten ... 281
14.1.6 Übungen und Aufgaben ... 290
14.2 Die Integralformeln der Feldtheorie ... 292
14.2.1 Die klassischen Integralformeln in Vektorschreibweise ... 292
14.2.2 Die physikalische Interpretation von div, rot und grad ... 295
14.2.3 Weitere Integralformeln ... 299
14.2.4 Übungen und Aufgaben ... 302
14.3 Potentialfelder ... 304
14.3.1 Das Potential eines Vektorfeldes ... 304
14.3.2 Notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials 305
14.3.3 Kriterium damit ein Feld ein Potentialfeld ist ... 306
14.3.4 Topologische Struktur eines Gebiets und Potentiale ... 310
14.3.5 Vektorpotentiale. Exakte und geschlossene Formen ... 312
14.3.6 Übungen und Aufgaben ... 316
14.4 Anwendungsbeispiele ... 320
14.4.1 Die Wärmegleichung ... 320
14.4.2 Die Kontinuitätsgleichung ... 322
14.4.3 Gleichungen zur Dynamik kontinuierlicher Materie ... 324
14.4.4 Die Wellengleichung ... 326
14.4.5 Übungen und Aufgaben ... 327

**15 *Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten** 331
15.1 Ein kurzer Rückblick zur linearen Algebra .................. 331
15.1.1 Die Algebra der Formen .................. 331
15.1.2 Die Algebra der schief-symmetrischen Formen .................. 332
15.1.3 Lineare Abbildungen und ihre Adjungierte .................. 335
15.1.4 Übungen und Aufgaben .................. 337
15.2 Mannigfaltigkeiten .................. 338
15.2.1 Definition einer Mannigfaltigkeit .................. 338
15.2.2 Glatte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen .................. 344
15.2.3 Orientierung einer Mannigfaltigkeit und ihres Randes .. 347
15.2.4 Zerlegungen der Eins. Mannigfaltigkeiten als Flächen .. 351
15.2.5 Übungen und Aufgaben .................. 355
15.3 Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten .... 357
15.3.1 Der Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit in einem Punkt .................. 357
15.3.2 Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit .................. 361
15.3.3 Die äußere Ableitung .................. 363
15.3.4 Das Integral einer Form über einer Mannigfaltigkeit ... 364
15.3.5 Die Stokesche Formel .................. 366
15.3.6 Übungen und Aufgaben .................. 368
15.4 Geschlossene und exakte Formen auf Mannigfaltigkeiten .................. 374
15.4.1 Der Satz von Poincaré .................. 374
15.4.2 Homologie und Kohomologie .................. 377
15.4.3 Übungen und Aufgaben .................. 383

**16 Gleichmäßige Konvergenz und Basisoperationen der Analysis** .................. 385
16.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz .................. 385
16.1.1 Punktweise Konvergenz .................. 385
16.1.2 Formulierung der fundamentalen Probleme .................. 386
16.1.3 Konvergenz einer von einem Parameter abhängigen Familie .................. 388
16.1.4 Das Cauchysche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz 392
16.1.5 Übungen und Aufgaben .................. 393
16.2 Gleichmäßige Konvergenz einer Reihe von Funktionen .................. 394
16.2.1 Grundlegende Definitionen. Gleichmäßige Konvergenz einer Reihe .................. 394
16.2.2 Weierstraßscher $M$-Test auf gleichmäßige Konvergenz .. 397
16.2.3 Der Test nach Abel–Dirichlet .................. 399
16.2.4 Übungen und Aufgaben .................. 403
16.3 Funktionale Eigenschaften einer Grenzfunktion .................. 404
16.3.1 Problembeschreibung .................. 404
16.3.2 Bedingungen für die Vertauschbarkeit zweier Grenzwertübergänge .................. 405
16.3.3 Stetigkeit und Grenzwertübergang .................. 406

16.3.4 Integration und Grenzwertübergang . . . 410
16.3.5 Differentiation und Grenzwertübergang . . . 412
16.3.6 Übungen und Aufgaben . . . 417
16.4 *Teilmengen des Raumes der stetigen Funktion . . . 421
16.4.1 Der Satz von Arzelà–Ascoli . . . 421
16.4.2 Der metrische Raum $C(K, Y)$ . . . 424
16.4.3 Der Satz von Weierstraß–Stone . . . 425
16.4.4 Übungen und Aufgaben . . . 428

**17 Parameterintegrale** . . . 431
17.1 Eigentliche Parameterintegrale . . . 431
17.1.1 Grundbegriffe . . . 431
17.1.2 Stetigkeit des Integrals . . . 432
17.1.3 Ableitung des Integrals . . . 433
17.1.4 Integration des Integrals . . . 437
17.1.5 Übungen und Aufgaben . . . 438
17.2 Uneigentliche Parameterintegrale . . . 440
17.2.1 Gleichmäßige Konvergenz bzgl. eines Parameters . . . 440
17.2.2 Stetigkeit eines Parameterintegrals . . . 448
17.2.3 Ableitung nach einem Parameter . . . 451
17.2.4 Integration eines uneigentlichen Integrals . . . 454
17.2.5 Übungen und Aufgaben . . . 459
17.3 Die Eulerschen Integrale . . . 462
17.3.1 Die Betafunktion . . . 463
17.3.2 Die Gammafunktion . . . 465
17.3.3 Der Zusammenhang zwischen der Beta- und der Gammafunktion . . . 468
17.3.4 Beispiele . . . 469
17.3.5 Übungen und Aufgaben . . . 471
17.4 Faltung und verallgemeinerte Funktionen . . . 475
17.4.1 Faltung bei physikalischen Problemen . . . 475
17.4.2 Allgemeine Eigenschaften einer Faltung . . . 477
17.4.3 Näherungsgleichungen und der Satz von Weierstraß . . . 481
17.4.4 *Elementare Konzepte rund um Distributionen . . . 487
17.4.5 Übungen und Aufgaben . . . 498
17.5 Mehrfache Parameterintegrale . . . 504
17.5.1 Eigentliche mehrfache Parameterintegrale . . . 504
17.5.2 Uneigentliche Mehrfachintegrale . . . 505
17.5.3 Uneigentliche Integrale mit einer veränderlichen Singularität . . . 506
17.5.4 *Faltung im mehr-dimensionalen Fall . . . 511
17.5.5 Übungen und Aufgaben . . . 522

**18 Fourier–Reihen und die Fourier–Transformation** ........... 527
18.1 Allgemeine Grundbegriffe zu Fourier–Reihen ........... 527
18.1.1 Orthogonale Funktionensysteme ........... 527
18.1.2 Fourier–Koeffizienten und Fourier–Reihen ........... 534
18.1.3 *Eine Quelle für orthogonale Systeme ........... 546
18.1.4 Übungen und Aufgaben ........... 550
18.2 Trigonometrische Fourier–Reihen ........... 556
18.2.1 Wichtige Konvergenzarten klassischer Fourier–Reihen .. 556
18.2.2 Punktweise Konvergenz einer Fourier–Reihe ........... 562
18.2.3 Glattheit und Abnahme der Fourier–Koeffizienten ..... 572
18.2.4 Vollständigkeit des trigonometrischen Systems ........ 577
18.2.5 Übungen und Aufgaben ........... 584
18.3 Die Fourier–Transformation ........... 592
18.3.1 Fourier–Integraldarstellung ........... 592
18.3.2 Differentialeigenschaften und die Fourier-Transformierte 606
18.3.3 Die wichtigsten strukturellen Eigenschaften ........... 609
18.3.4 Beispiele und Anwendungen ........... 615
18.3.5 Übungen und Aufgaben ........... 621

**19 Asymptotische Entwicklungen** ........... 629
19.1 Asymptotische Formeln und asymptotische Reihen ........... 631
19.1.1 Grundlegende Definitionen ........... 631
19.1.2 Allgemeine Tatsachen zu asymptotischen Reihen ...... 637
19.1.3 Asymptotische Potenzreihen ........... 641
19.1.4 Übungen und Aufgaben ........... 644
19.2 Die Asymptotik von Integralen (die Laplacesche Methode) .... 647
19.2.1 Die Idee hinter der Laplaceschen Methode ........... 647
19.2.2 Das Lokalisierungsprinzip für ein Laplace–Integral ..... 650
19.2.3 Kanonische Integrale und ihr asymptotisches Verhalten . 652
19.2.4 Asymptotik eines Laplace–Integrals ........... 656
19.2.5 *Asymptotische Entwicklungen von Laplace–Integralen . 659
19.2.6 Übungen und Aufgaben ........... 671

**Themen und Fragen für Halbjahresprüfungen** ........... 679
1. Reihen und parameterabhängige Integrale ........... 679
2. Empfohlene Aufgaben für die Halbjahresprüfungen ........... 680
3. Integralberechnungen (mehrere Variable) ........... 682
4. Empfohlene Aufgaben für das Studium der Halbjahresthemen ... 683

**Prüfungsgebiete** ........... 685
1. Reihen und parameterabhängige Integrale ........... 685
2. Integralrechnung (Mehrere Variable) ........... 686

**Literaturverzeichnis** .......... 689
1. Klassische Werke .......... 689
1.1 Hauptquellen .......... 689
1.2 Wichtige umfassende grundlegende Werke .......... 689
1.3 Klassische Vorlesungen in Analysis aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts .......... 689
2. Lehrbücher .......... 690
3. Studienunterlagen .......... 690
4. Weiterführende Literatur .......... 691

**Symbolverzeichnis** .......... 693

**Sachverzeichnis** .......... 697

**Namensverzeichnis** .......... 707