

Jürgen Tietze

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

Das praxisnahe Lehrbuch - bewährt
durch seine brillante Darstellung

15., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 500 Abbildungen und 1300 Übungsaufgaben

STUDIUM



VIEWEG +
TEUBNER

HOCHSCHULE
LIECHTENSTEIN
Bibliothek

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----------|
| Vorwort | V |
| Symbolverzeichnis | XV |
| Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet | XVI |
| 1 Grundlagen und Hilfsmittel | 1 |
| 1.1 Mengen und Aussagen | 1 |
| 1.1.1 Mengenbegriff | 1 |
| 1.1.2 Spezielle Zahlenmengen | 3 |
| 1.1.3 Aussagen und Aussageformen | 4 |
| 1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen | 8 |
| 1.1.4.1 Konjunktion | 8 |
| 1.1.4.2 Disjunktion | 9 |
| 1.1.4.3 Negation | 10 |
| 1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen | 10 |
| 1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz | 13 |
| 1.1.5.1 Folgerung (Implikation) | 13 |
| 1.1.5.2 Äquivalenz | 14 |
| 1.1.6 Relationen zwischen Mengen | 15 |
| 1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen | 15 |
| 1.1.6.2 Teilmengen | 15 |
| 1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen | 16 |
| 1.1.7.1 Durchschnittsmenge | 16 |
| 1.1.7.2 Vereinigungsmenge | 17 |
| 1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge) | 17 |
| 1.1.8 Paarmengen, Produktmengen | 20 |
| 1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen | 21 |
| 1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in IR | 22 |
| 1.2.1.1 Axiome | 22 |
| 1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen | 24 |
| 1.2.1.3 Betrag einer Zahl | 29 |
| 1.2.1.4 Das Summenzeichen | 29 |
| 1.2.1.5 Das Produktzeichen | 31 |
| 1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient | 32 |
| 1.2.2 Potenzen | 34 |
| 1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten | 34 |
| 1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten | 36 |
| 1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln | 37 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 1.2.2.4 | Potenzen mit reellen Exponenten | |
| 1.2.3 | Logarithmen | |
| 1.2.3.1 | Begriff des Logarithmus | |
| 1.2.3.2 | Logarithmenbasen | |
| 1.2.3.3 | Rechenregeln für Logarithmen | |
| 1.2.3.4 | Logarithmen zu beliebiger Basis. | |
| 1.2.4 | Gleichungen. | |
| 1.2.4.1 | Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen | |
| 1.2.4.2 | Äquivalenzumformungen | |
| 1.2.4.3 | Lineare Gleichungen $ax + b = ex + d$ | |
| 1.2.4.4 | Lineare Gleichungssysteme (LGS) | |
| 1.2.4.5 | Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + e = 0$ | |
| 1.2.4.6 | Gleichungen höheren als zweiten Grades | |
| 1.2.4.7 | Wurzelgleichungen | |
| 1.2.4.8 | Exponentialgleichungen | |
| 1.2.4.9 | Logarithmengleichungen | |
| 1.2.4.10 | Bruehgleichungen | |
| 1.2.5 | Ungleichungen | |
| 1.2.6 | Wo steckt der Fehler? | |
| 1.2.6.1 | Fehler bei Termumformungen | |
| 1.2.6.2 | Fehler bei der Lösung von Gleichungen | |
| 1.2.6.3 | Fehler bei der Lösung von Ungleichungen | |
| 2 | Funktionen einer unabhängigen Variablen | |
| 2.1 | Begriff und Darstellung von Funktionen | |
| 2.1.1 | Funktionsbegriff | |
| 2.1.2 | Graphische Darstellung von Funktionen | |
| 2.1.3 | Abschnittsweise definierte Funktionen | |
| 2.1.4 | Umkehrfunktionen | |
| 2.1.5 | Implizite Funktionen | |
| 2.1.6 | Verkettete Funktionen | |
| 2.2 | Eigenschaften von Funktionen | |
| • 2.2.1 | Beschränkte Funktionen | |
| 2.2.2 | Monotone Funktionen | |
| 2.2.3 | Symmetrische Funktionen | |
| 2.2.4 | Nullstellen von Funktionen | |
| 2.3 | Elementare Typen von Funktionen | 100 |
| 2.3.1 | Ganzrationale Funktionen (Polynome). | 100 |
| 2.3.1.1 | Grundbegriffe, Horner-Schema | 101 |
| 2.3.1.2 | Konstante und lineare Funktionen | 102 |
| 2.3.1.3 | Quadratische Funktionen | 109 |
| 2.3.1.4 | Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung | 111 |
| 2.3.2 | Gebrochen-rationale Funktionen | 114 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 2.3.3 | Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen) | 116 |
| 2.3.4 | Exponentialfunktionen | 118 |
| 2.3.5 | Logarithmusfunktionen | 120 |
| 2.3.6 | Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen) | 121 |
| 2.4 | Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi) | 127 |
| 2.5 | Beispiele ökonomischer Funktionen | 131 |
| 3 | Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen | 153 |
| 3.1 | Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . | 153 |
| 3.2 | Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen | 154 |
| 3.3 | Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen | 163 |
| 4 | Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen | 167 |
| 4.1 | Der Grenzwertbegriff | 167 |
| 4.1.1 | Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$ | 168 |
| 4.1.2 | Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$) ... | 172 |
| 4.2 | Grenzwerte spezieller Funktionen | 178 |
| 4.3 | Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen | 181 |
| 4.4 | Der Stetigkeitsbegriff | 185 |
| 4.5 | Unstetigkeitstypen | 187 |
| 4.6 | Stetigkeitsanalyse | 189 |
| 4.7 | Stetigkeit ökonomischer Funktionen | 192 |
| 4.8 | Asymptoten | 195 |
| 5 | Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen - Grundlagen und Technik | 199 |
| 5.1 | Grundlagen der Differentialrechnung | 199 |
| 5.1.1 | Problemstellung | 199 |
| 5.1.2 | Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient | 199 |
| 5.1.3 | Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient) | 201 |
| 5.1.4 | Differenzierbarkeit und Stetigkeit | 205 |
| 5.2 | Technik des Differenzierens | 206 |
| 5.2.1 | Die Ableitung der Grundfunktionen | 207 |
| 5.2.1.1 | Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$... | 207 |
| 5.2.1.2 | Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ | 207 |
| 5.2.1.3 | Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$... | 208 |
| 5.2.1.4 | Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$. | 209 |
| 5.2.2 | Ableitungsregeln | 211 |
| 5.2.2.1 | Faktorregel | 211 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 5.2.2.2 | Summenregel | 211 |
| 5.2.2.3 | Produktregel , | 212 |
| 5.2.2.4 | Quotientenregel | 213 |
| 5.2.2.5 | Kettenregel | 215 |
| 5.2.3 | Ergänzungen zur Ableitungstechnik | 21€ |
| 5.2.3.1 | Ableitung der Umkehrfunktion | 218 |
| 5.2.3.2 | Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen | 220 |
| 5.2.3.3 | Logarithmische Ableitung | 222 |
| 5.2.4 | Höhere Ableitungen | 223 |
| 5.2.5 | Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln .. | 225 |
| 5.3 | Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken - Regeln von de L'Hospital | 226 |
| 5.4 | Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion | 233 |
| 6 | Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen | 237 |
| 6.1 | Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung | 237 |
| 6.1.1 | Das Differential einer Funktion | 237 |
| 6.1.2 | Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion | 240 |
| 6.1.2.1 | Grenzkosten | 242 |
| 6.1.2.2 | Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben) | 243 |
| 6.1.2.3 | Grenzproduktivität (Grenzertrag) | 244 |
| 6.1.2.4 | Grenzgewinn | 246 |
| 6.1.2.5 | Marginale Konsumquote | 247 |
| 6.1.2.6 | Marginale Sparquote. | 247 |
| 6.1.2.7 | Grenzrate der Substitution | 248 |
| 6.1.2.8 | Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion | 249 |
| 6.2 | Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen | 252 |
| 6.2.1 | Monotonie- und Krümmungsverhalten | 253 |
| 6.2.2 | Extremwerte | 256 |
| 6.2.3 | Wendepunkte | 260 |
| 6.2.4 | Kurvendiskussion | 262 |
| 6.2.5 | Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen | 268 |
| 6.3 | Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme | 270 |
| 6.3.1 | Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen. | 270 |
| 6.3.1.1 | Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen | 271 |
| 6.3.1.2 | Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften | 274 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 6.3.2 | Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen | 276 |
| 6.3.2.1 | Fahrstrahlanalyse | 277 |
| 6.3.2.2 | Diskussion ökonomischer Funktionen | 280 |
| 6.3.2.3 | Gewinnmaximierung | 282 |
| 6.3.2.4 | Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion | 289 |
| 6.3.2.5 | Optimale Lagerhaltung | 291 |
| 6.3.3 | Die Elastizität ökonomischer Funktionen | 301 |
| 6.3.3.1 | Änderungen von Funktionen | 301 |
| 6.3.3.2 | Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen | 303 |
| 6.3.3.3 | Elastizität ökonomischer Funktionen | 308 |
| 6.3.3.4 | Graphische Ermittlung der Elastizität | 314 |
| 6.3.4 | Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung | 319 |
| 7 | Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen | 325 |
| 7.1 | Grundlagen | 325 |
| 7.1.1 | Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen'.... | 325 |
| 7.1.2 | Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen | 330 |
| 7.1.3 | Partielle Ableitung höherer Ordnung | 331 |
| 7.1.4 | Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen | 333 |
| 7.1.5 | Partielles und vollständiges (totales) Differential | 335 |
| 7.1.6 | Kettenregel, totale Ableitung | 337 |
| 7.1.7 | Ableitung impliziter Funktionen | 340 |
| 7.2 | Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen | 344 |
| 7.2.1 | Relative Extrema ohne Nebenbedingungen | 344 |
| 7.2.2 | Extremwerte unter Nebenbedingungen | 346 |
| 7.2.2.1 | Problemstellung | 346 |
| 7.2.2.2 | Variablensubstitution | 348 |
| 7.2.2.3 | Lagrange-Methode | 348 |
| 7.3 | Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen | 352 |
| 7.3.1 | Partielle Elastizitäten | 352 |
| 7.3.1.1 | Begriff der partiellen Elastizität | 352 |
| 7.3.1.2 | Die Eulersche Homogenitätsrelation | 353 |
| 7.3.1.3 | Elastizität homogener Funktionen | 354 |
| 7.3.1.4 | Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes | 357 |
| 7.3.2 | Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen) | 362 |
| 7.3.2.1 | Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion | 362 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 7.3.2.2 | Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen | 366 |
| 7.3.2.3 | Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung | 371 |
| 7.3.2.4 | Die Methode der kleinsten Quadrate | 374 |
| 7.3.3 | Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen | 377 |
| 7.3.3.1 | Minimalkostenkombination | 377 |
| 7.3.3.2 | Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion | 383 |
| 7.3.3.3 | Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum . . | 387 |
| 7.3.3.4 | Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen | 393 |
| 8 | Einführung in die Integralrechnung | 401 |
| 8.1 | Das unbestimmte Integral | 401 |
| 8.1.1 | Stammfunktion und unbestimmtes Integral | 401 |
| 8.1.2 | Grundintegrale | 404 |
| 8.1.3 | Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral | 405 |
| 8.2 | Das bestimmte Integral | 407 |
| 8.2.1 | Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals | 407 |
| 8.2.2 | Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals | 409 |
| 8.2.3 | Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals . . | 410 |
| 8.3 | Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral | 412 |
| 8.3.1 | Integralfunktion | 412 |
| 8.3.2 | Der 1. ^Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 413 |
| 8.3.3 | Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 415 |
| 8.3.4 | Flächeninhaltsberechnung | 416 |
| 8.4 | Spezielle Integrationstechniken | 418 |
| 8.4.1 | Partielle Integration | 419 |
| 8.4.2 | Integration durch Substitution | 420 |
| 8.5 | Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung | 422 |
| 8.5.1 | Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen | 422 |
| 8.5.2 | Die Konsumentenrente | 425 |
| 8.5.3 | Die Produzentenrente | 426 |
| 8.5.4 | Kontinuierliche Zahlungsströme | 428 |
| 8.5.5 | Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft . . | 432 |
| 8.5.6 | Optimale Nutzungsdauer von Investitionen | 433 |
| 8.6 | Elementare Differentialgleichungen | 437 |
| 8.6.1 | Einleitung | 437 |
| 8.6.2 | Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen | 438 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8.6.3 | Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen | 441 |
| 8.6.3.1 | Exponentielles Wachstum | 441 |
| 8.6.3.2 | Funktionen mit vorgegebener Elastizität | 441 |
| 8.6.3.3 | Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow .. | 443 |
| 9 | Einführung in die Lineare Algebra | 449 |
| 9.1 | Matrizen und Vektoren | 449 |
| 9.1.1 | Grundbegriffe der Matrizenrechnung | 449 |
| 9.1.2 | Spezielle Matrizen und Vektoren | 453 |
| 9.1.3 | Operationen mit Matrizen | 454 |
| 9.1.3.1 | Addition von Matrizen | 454 |
| 9.1.3.2 | Multiplikation einer Matrix mit, einem Skalarfaktor | 456 |
| 9.1.3.3 | Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt) | 458 |
| 9.1.3.4 | Multiplikation von Matrizen | 459 |
| 9.1.4 | Die inverse Matrix | 466 |
| 9.1.5 | Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse) | 468 |
| 9.2 | Lineare Gleichungssysteme (LGS) | 473 |
| 9.2.1 | Grundbegriffe | 473 |
| 9.2.2 | Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme - Gaußscher Algorithmus | 475 |
| 9.2.3 | Pivotisieren | 481 |
| 9.2.4 | Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme | 486 |
| 9.2.5 | Berechnung der Inversen einer Matrix | 491 |
| 9.2.6 | Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme | 493 |
| 9.2.6.1 | Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung | 493 |
| 9.2.6.2 | Innerbetriebliche Leistungsverrechnung | 495 |
| 10 | Lineare Optimierung (LO) | 499 |
| 10.1 | Grundlagen und graphische Lösungsmethode | 499 |
| 10.1.1 | Ein Problem der Produktionsplanung | 499 |
| 10.1.2 | Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems .. | 500 |
| 10.1.3 | Ein Diät-Problem | 502 |
| 10.1.4 | Graphische Lösung des Diät-Problems. | 503 |
| 10.1.5 | Sonderfälle bergraphischer Lösung | 505 |
| 10.1.6 | Graphische Lösung von LO-Problemen - Zusammenfassung | 508 |
| 10.2 | Simplexverfahren | 510 |
| 10.2.1 | Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems . | 510 |
| 10.2.2 | Grundidee des Simplexverfahrens | 512 |
| 10.2.3 | Einführung von Schlupfvariablen | 512 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 10.2.4 | Eckpunkte und Basislösungen | 513 |
| 10.2.5 | Optimalitätskriterium | 515 |
| 10.2.6 | Engpassbedingung | 516 |
| 10.2.7 | Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall - Zusammenfassung | 518 |
| 10.2.8 | Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem) | 519 |
| 10.3 | Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme | 521 |
| 10.4 | Sonderfälle bei LO-Problemen | 528 |
| 10.4.1 | Keine zulässige Lösung | 528 |
| 10.4.2 | Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung) | 529 |
| 10.4.3 | Degeneration (Entartung) | 529 |
| 10.4.4 | Mehrdeutige optimale Lösungen | 531 |
| 10.4.5 | Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen | 533 |
| 10.4.6 | Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall | 534 |
| 10.5 | Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus | 535 |
| 10.5.1 | Produktionsplanungsproblem | 535 |
| 10.5.1.1 | Problemformulierung, Einführung von Einheiten | 535 |
| 10.5.1.2 | Optimaltableau und optimale Basislösung | 537 |
| 10.5.1.3 | Deutung der Zielfunktionskoeffizienten | 537 |
| 10.5.1.4 | Deutung der inneren Koeffizienten | 538 |
| 10.5.1.5 | Zusammenfassung | 540 |
| 10.5.2 | Diätproblem | 541 |
| 10.6 | Dualität | 542 |
| 10.6.1 | Das duale LO-Problem | 542 |
| 10.6.2 | Dualitätssätze | 545 |
| 10.7 | Ökonomische Interpretation des Dualproblems | 548 |
| 10.7.1 | Dual eines Produktionsplanungsproblems | 548 |
| 10.7.2 | Dual eines Diätproblems | 550 |
| 11 | Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben | 553 |
| 12 | Literaturverzeichnis | 585 |
| 13 | Sachwortverzeichnis | 589 |